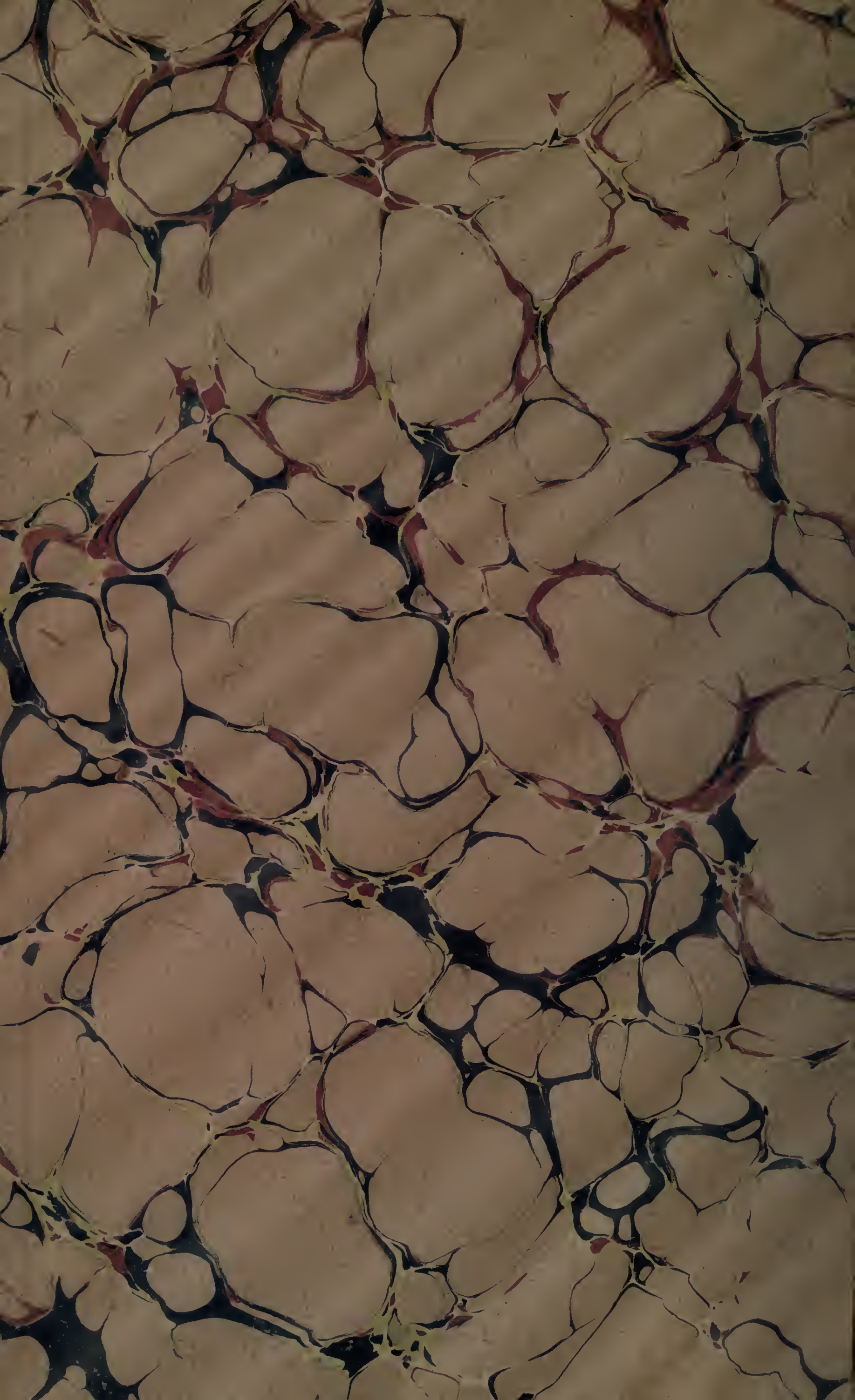
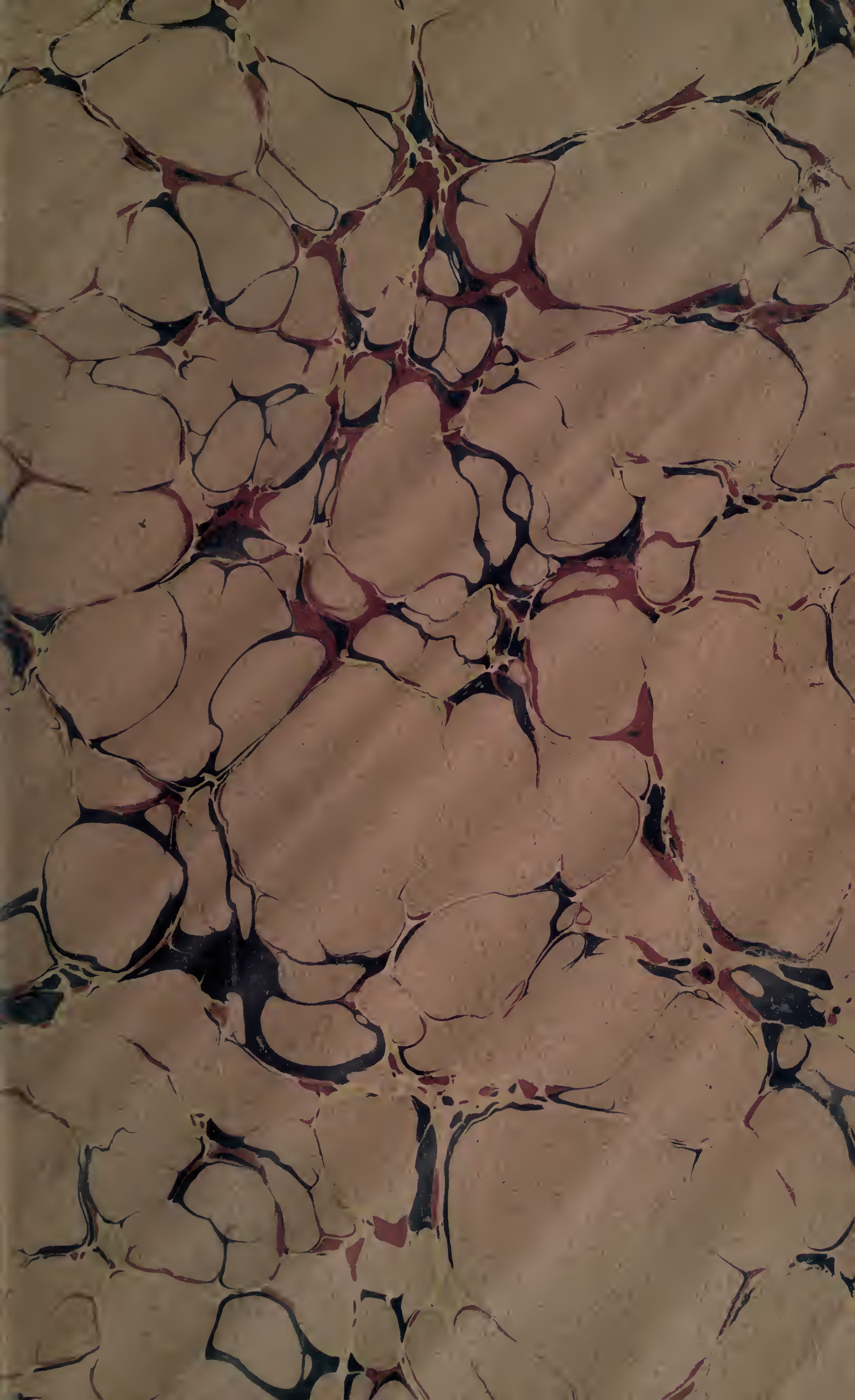

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01219486 6





Alfred T. Drowing

TRAITÉ

D'ANALYSE

13380 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

TRAITÉ

D'ANALYSE

PAR

H. LAURENT,

EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

> Le calcul de Leibnitz l'a mené dans des païs jusqu'ici inconnus; et il y a fait des découvertes qui font l'étonnement des plus habiles mathématiciens de l'Europe.
>
> DE L'HOSPITAL, *Calcul des infiniment petits.*

TOME IV.

CALCUL INTÉGRAL.

THÉORIE DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES ET DE LEURS INTÉGRALES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1889

TRAITÉ
D'ANALYSE.

CALCUL INTÉGRAL.

THÉORIE DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES ET DE LEURS INTÉGRALES.

CHAPITRE I.

THÉORIE DES FONCTIONS SYNECTIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES.

I. — Préliminaires.

La théorie des fonctions de plusieurs variables imaginaïres est loin d'être aussi avancée que la théorie des fonctions d'une seule variable; c'est à M. Weierstrass que l'on doit les premières tentatives effectuées pour édifier cette théorie.

Un ensemble de plusieurs variables indépendantes z_1, $z_2, \ldots, z_n$ constitue un *point* [*Eine Stelle* (Weierstrass)]. Si nous supposons que $z_1, z_2, \ldots, z_n$ se meuvent à l'intérieur de contours fermés simples $C_1, C_2, \ldots, C_n$, nous dirons que les intérieurs de ces contours forment le *domaine* du point $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (*Umgebung*).

Soit D un domaine du point $z_1, z_2, \ldots, z_n$; la fonction $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ sera dite synectique dans le domaine D en question, si elle l'est par rapport à chaque variable, les autres étant censées constantes, toutes les variables restant d'ailleurs contenues dans le domaine D.

II. — Des fonctions développables en séries entières.

Nous appellerons série entière une série de la forme

$$P_0 + P_1 + \ldots + P_n + \ldots,$$

$P_0, P_1, P_2, \ldots$ désignant des polynômes entiers et homogènes en $z_1, z_2, \ldots, z_n$ respectivement des degrés 0, 1, 2, ... une pareille série pourra encore s'écrire sous la forme

$$\sum_0^\infty A_{\nu_1,\nu_2,\ldots} z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \ldots,$$

$A_{\nu_1,\nu_2,\ldots}$ désignant un coefficient indépendant de $z_1, z_2, \ldots$. Bien que nous n'ayons pas exposé la théorie des séries triples, quadruples, etc., ce que nous avons dit des séries doubles et de la théorie de l'hyperespace suffit pour faire comprendre que la théorie des séries doubles s'applique aux séries multiples les plus générales; nous nous appuierons donc, sans autres commentaires, sur la théorie de ces séries dans ce qui va suivre.

Théorème I. — *Les variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ étant supposées contenues dans des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$, de rayons $r_1, r_2, \ldots, r_n$ décrits de l'origine comme centre, si les modules des termes de la série*

$$\sum_0^\infty A_{\nu_1,\nu_2,\ldots} z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \ldots \tag{1}$$

sont finis quand $\operatorname{mod} z_1 = r_1$, $\operatorname{mod} z_2 = r_2$, ..., *cette série est convergente dans le domaine* $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

En effet, la série

$$(2) \qquad \sum_0^\infty \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^{\nu_1}\left(\frac{\rho_2}{r_2}\right)^{\nu_2}\cdots,$$

dans laquelle on suppose

$$\rho_1 < r_1, \quad \rho_2 < r_2 \quad \ldots \quad \text{et} \quad \rho_1 > 0, \quad \rho_2 > 0, \quad \ldots,$$

est convergente; cela peut se voir de bien des manières et en particulier en observant que la somme des p premiers groupes homogènes de la série (2) est égale au produit

$$\left[1+\left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)+\left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^{p-1}\right]\left[1+\left(\frac{\rho_2}{r_2}\right)+\ldots+\left(\frac{\rho_2}{r_2}\right)^{p-1}\right]\cdots,$$

qui tend vers une limite finie pour $p=\infty$.

Soit $a_{\nu_1,\nu_2,\ldots}$ le module de $A_{\nu_1,\nu_2,\ldots}$, les nombres $a_{\nu_1,\nu_2,\ldots} r_1^{\nu_1} r_2^{\nu_2}\ldots$ étant finis par hypothèse, la série

$$(3) \qquad \sum a_{\nu_1,\nu_2,\ldots}\, \rho_1^{\nu_1}\rho_2^{\nu_2}\ldots$$

sera convergente, et par suite la série (1), dont les modules sont les divers termes de (3), est elle-même convergente.

C. Q. F. D.

Théorème II. — *Lorsqu'une série entière est convergente dans un domaine* D *composé de cercles décrits de l'origine comme centre, elle représente une fonction synectique dans ce domaine.*

Théorème III. — *Lorsqu'une fonction* $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *est synectique dans un domaine* D *composé de cercles* C_1, C_2, …, C_n *décrits de l'origine comme centre avec des rayons* R_1, R_2, …, R_n, *elle est développable dans ce domaine en série entière.*

En effet, considérons les points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ contenus dans le domaine D, la fonction de t

$$\varphi(t) = f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$$

sera synectique par rapport à t dans un cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon un peu supérieur à un, et l'on aura

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \ldots + \frac{t^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(0) + \ldots,$$

et, comme l'on sait (t. I, p. 141).

$$\varphi^n(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}x_n\right)^n,$$

formule symbolique dans laquelle il faut supposer $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ... dans les dérivées; on en conclut le développement de $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \ldots + \frac{t^n}{1.2\ldots n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}x_2 \ldots\right)^n + \ldots.$$

qui, ayant lieu pour $t = 1$, donne

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ = f(0, 0, \ldots) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}x_2 + \ldots\right)^n + \ldots.$$

Corollaire I. — *Si une fonction $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ est synectique dans un domaine* D *composé de cercles* C_1, C_2, ..., C_n, *décrits autour des points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ comme centres, elle est développable dans ce domaine en série de la forme*

$$\sum A_{\nu_1,\nu_2,\ldots}(z_1 - a_1)^{\nu_1}(z_2 - a_2)^{\nu_2}\ldots.$$

Cette condition, suffisante pour que le développement soit possible, n'est nullement nécessaire, comme on a voulu le faire dire à Cauchy et à ses disciples.

Corollaire II. — Les coefficients du développement de $f(z_1, z_2, \ldots)$ peuvent se mettre sous forme d'intégrales définies, ou, ce qui revient au même, on peut mettre sous cette

forme la dérivée $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\ldots} f}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta \ldots}$ de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; en effet, on a

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z_1, x_2, \ldots) dz_1}{z_1 - x_1} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \int\int \frac{f(z_1, z_2, x_3, \ldots)}{(z_1 - x_1)(z_2 - x_2)} dz_1 dz_2 \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int\int \ldots \frac{f(z_1, \ldots, z_n) dz_1 \ldots dz_n}{(z_1 - x_1) \ldots (z_n - x_n)}, \end{aligned}$$

les intégrales étant prises le long des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$, qui forment le domaine D et qui sont décrits des points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme centres avec des rayons que nous supposons égaux à $R_1, R_2, \ldots, R_n$; on en conclut

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\ldots} f}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta \ldots} = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^n \int\int \ldots \frac{f(z_1, z_2, \ldots)}{(z_1 - x_1)^{\alpha+1} (z_2 - x_2)^{\beta+1} \ldots} \frac{dz_1 dz_2 \ldots}{\alpha!\, \beta! \ldots},$$

et en particulier, quand $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$,

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta \ldots} f}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta \ldots} = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^n \int\int \ldots \frac{f(z_1, z_2, \ldots)}{z_1^{\alpha+1} z_2^{\beta+1} \ldots} \frac{dz_1 dz_2 \ldots}{\alpha!\, \beta! \ldots}.$$

Si l'on fait

$$z_1 = R_1 e^{\theta_1\sqrt{-1}}, \qquad z_2 = R_2 e^{\theta_2\sqrt{-1}}, \qquad \ldots,$$

on trouve

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\ldots} f}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta \ldots} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\int \ldots \frac{f(z_1, z_2, \ldots)}{R_1^\alpha R_2^\beta \ldots} e^{-(\alpha\theta_1 + \beta\theta_2 \ldots)\sqrt{-1}} \frac{d\theta_1 d\theta_2 \ldots}{\alpha!\, \beta! \ldots}.$$

Cette formule nous sera utile.

THÉORÈME IV. — *Deux séries entières de la forme*

$$\sum A_{\nu_1, \nu_2, \ldots} (z_1 - a_1)^{\nu_1} (z_2 - a_2)^{\nu_2} \ldots,$$

$$\sum B_{\nu_1, \nu_2, \ldots} (z_1 - a_1)^{\nu_1} (z_2 - a_2)^{\nu_2} \ldots,$$

qui sont égales dans un domaine de dimensions finies, ont

même domaine de convergence et représentent deux fonctions égales dans ce domaine; de plus, on a

$$A_{\nu_1,\nu_2,\ldots} = B_{\nu_1,\nu_2,\ldots}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de faire la démonstration.

Théorème V. — *Une fonction ne peut rester synectique dans toute l'étendue du plan; en d'autres termes, une fonction qui reste monodrome, monogène, finie et continue pour toutes les valeurs finies de ses variables, devient nécessairement infinie pour des valeurs infinies de ses variables, à moins de se réduire à une constante.*

Ce théorème peut se démontrer directement à l'aide de la méthode déjà employée pour le cas où la fonction ne dépend que d'une seule variable; mais on peut aussi le démontrer en observant que, si la fonction $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ était toujours synectique même à l'infini, il en serait de même de la fonction $f(z_1, a_2, \ldots, a_n)$ obtenue en attribuant à $z_2, z_3, \ldots, z_n$ des valeurs particulières $a_2, a_3, \ldots, a_n$, ce qui exige que la fonction $f(z_1, a_2, \ldots, a_n)$ soit une constante, c'est-à-dire soit indépendante de z_1. On a donc $\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0$, quels que soient $z_1, a_2, \ldots, a_n$, ou quels que soient $z_1, z_2, \ldots z_n$ et, par suite, f est indépendant de z_1. On verrait de même qu'il est indépendant des autres variables : donc il est constant.

III. — Théorème de M. Weierstrass.

Soit $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ une fonction synectique à l'intérieur d'un domaine D *contenant le point*

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0,$$

et nulle en ce point : si la fonction $f(z_1, 0, \ldots, 0)$, obtenue en faisant $z_2 = z_3 = \ldots = z_n = 0$ dans $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, n'est pas nulle, quel que soit z_1, il existera un domaine D′ *con-*

tenu dans D *tel que l'on aura pour les points intérieurs à ce domaine*

$$f = \mathrm{P}\varphi,$$

P *désignant un polynôme entier en* z_1 *à coefficients synectiques en* $z_2, z_3, \ldots, z_n$ *et* φ *une fonction synectique dans le domaine* D' *qui ne s'annule pas dans ce domaine.*

Posons, en effet, $f = f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $f_0 = f(z_1, 0, \ldots, 0)$,

$$f_1 = f_0 - f; \tag{1}$$

la fonction f_0 a un nombre limité de zéros dans le domaine D, puisqu'elle est synectique et qu'elle n'est pas identiquement nulle; on peut donc supposer qu'elle n'a pas de zéro autre que o dans un cercle de rayon ρ_1 décrit de l'origine comme centre. La fonction f_1, en vertu de (1), est nulle pour $z_2 = 0$, $z_3 = 0, \ldots . z_n = 0$, quel que soit z_1; on peut donc supposer que, $z_2, z_3, \ldots, z_n$ restant intérieurs à un cercle de rayon ρ et z_1 extérieur à un cercle de rayon $\rho_0 < \rho$, on ait

$$\operatorname{mod} f_1 < \operatorname{mod} f_0.$$

Le domaine ainsi formé par la couronne circulaire de rayons ρ_0 et ρ_1 et par les cercles de rayons égaux à ρ, à l'intérieur desquels restent $z_2, z_3, \ldots, z_n$, sera le domaine D'.

Dans ce domaine on a

$$\log f = \log(f_0 - f_1) = \log f_0 - \sum_1^\infty \frac{1}{n}\left(\frac{f_1}{f_0}\right)^n$$

et, en différentiant par rapport à z_1,

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{1}{f_0}\frac{\partial f_0}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_1}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\left(\frac{f_1}{f_0}\right)^n; \tag{2}$$

si l'on suppose f_0 de la forme

$$a_m z_1^m + a_{m+1} z_1^{m+1} + \ldots,$$

$\frac{1}{f_0}\frac{\partial f_0}{\partial z_1}$ sera de la forme $\frac{m}{z_1} + g(z_1)$, $g(z_1)$ désignant une série ordonnée suivant les puissances entières de z_1, c'est-à-dire

une fonction synectique dans le domaine D'; quant à $\frac{f_1}{f_0}$, il sera développable sous la forme

$$\frac{A}{z_1} + \theta,$$

θ désignant une fonction synectique, ainsi que A, en sorte que $\sum \frac{1}{n}\left(\frac{f_1}{f_0}\right)^n$ sera développable en une double série ordonnée suivant les puissances entières de z_1 et de $\frac{1}{z_1}$ à coefficients synectiques en $z_2, z_3, \ldots$. Sa dérivée par rapport à z_1 sera une série de même forme ne contenant pas $\frac{1}{z_1}$, en sorte que la formule (2) s'écrira

$$(3) \qquad \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{m}{z_1} + g(z_1) + \sum_0^\infty Q_\nu z_1^\nu + \sum_2^\infty Q_{-\nu} z_1^{-\nu}.$$

On voit que $\frac{m}{z_1} + \sum_2^\infty Q_{-\nu} z_1^{-\nu}$ sera la partie du développement de $\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial z_1}$ qui procède suivant les puissances de $\frac{1}{z_1}$; cette partie a donc pour coefficients des fonctions synectiques de z_2, $z_3, \ldots, z_n$ dans le domaine D'.

Ceci posé, en appelant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ les valeurs de z_1 qui annulent f_0 et qui ont un module moindre que celui de z_1, on peut écrire (3) ainsi

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{m}{z_1} + \frac{a_1}{z_1 - \alpha_1} + \frac{a_2}{z_1 - \alpha_2} + \ldots g(z_1) + \sum_0^\infty Q_\nu z_1^\nu,$$

$a_1, a_2, \ldots$ désignant les degrés de multiplicité des zéros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, et, si l'on observe que $g(z_1) + \sum_0^\infty Q_\nu z_1^\nu$ est une fonction synectique h dans le domaine D', et que l'on peut poser

$$P = z_1^m (z_1 - \alpha_1)^{a_1} (z_1 - \alpha_2)^{a_2} \ldots,$$

on déduira, en intégrant la formule précédente,

$$f = \mathrm{P}\, e^{\int h\, dz_1}.$$

Or $e^{\int h\, dz_1}$ est une fonction synectique que l'on peut appeler φ et qui ne s'annule pas dans D′; on a donc, dans le domaine D′,

$$f = \mathrm{P}\varphi;$$

or P est un polynôme entier en z_1, et ses coefficients sont synectiques en $z_2, z_3, \ldots$, puisque $\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}$ se développe en une série à coefficients m, Q_{-2}, Q_{-3}, ... synectiques. Ces coefficients sont $\Sigma\alpha$, $\Sigma\alpha^2$, ...; les coefficients de P sont des fonctions entières de $\Sigma\alpha$, $\Sigma\alpha^2$, ... : donc P est bien à coefficients synectiques. C. Q. F. D.

Il résulte de ce théorème de M. Weierstrass que, étant données des valeurs de $z_2, z_3, \ldots, z_n$, la valeur de z_1, qu'il faut y adjoindre pour annuler la fonction $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, dans un domaine formé de cercles décrits de l'origine comme centre, est racine d'une équation algébrique $\mathrm{P} = 0$ à coefficients synectiques : cela suppose que $f(z_1, 0, \ldots, 0)$ n'est pas identiquement nul, c'est-à-dire que $f(z_1, z_2, \ldots)$ contient au moins un terme indépendant de $z_2, \ldots, z_n$; plus généralement, cela suppose qu'il y ait un terme qui ne contienne qu'une variable.

IV. — Des diviseurs des fonctions synectiques.

Nous dirons que la fonction $\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, synectique pour $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$, est *divisible* par la fonction $\psi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, synectique dans le même domaine, si l'on a

$$\varphi = \psi\varpi,$$

ϖ désignant une nouvelle fonction synectique dans ce domaine.

Quand $\psi(z_1, \ldots, z_n)$ ne s'annule pas au point

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0,$$

φ est divisible par ψ; dans le cas contraire, $\frac{\varphi}{\psi}$ est infini, φ ne peut pas être divisible par ψ, à moins que l'on n'ait aussi $\varphi(0, 0, \ldots, 0) = 0$: ce dernier cas doit être examiné à part.

Supposons donc φ et ψ nuls pour $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$; effectuons la substitution linéaire

$$\begin{aligned} z_1 &= \gamma_{11} t_1 + \gamma_{12} t_2 + \ldots + \gamma_{1n} t_n, \\ z_2 &= \gamma_{21} t_1 + \gamma_{22} t_2 + \ldots + \gamma_{2n} t_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

de module différent de zéro; les fonctions φ et ψ se transformeront en d'autres $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ et $g(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Soient

$$f_0 = f(t_1, 0, \ldots, 0), \qquad g_0 = g(t_1, 0, 0, \ldots, 0);$$

on peut toujours choisir la substitution de telle sorte que f_0 et g_0 ne soient pas nuls identiquement; alors, en vertu du théorème de M. Weierstrass, démontré au paragraphe précédent, on pourra trouver des polynômes P et Q entiers en t_1 et à coefficients synectiques satisfaisant aux identités

$$f = \mathrm{PF}, \qquad g = \mathrm{QG},$$

F et G désignant des fonctions synectiques dans le voisinage de l'origine. Nous supposerons

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= t_1^m + p_1 t_1^{m-1} + \ldots + p_m, \\ \mathrm{Q} &= t_1^n + q_1 t_1^{n-1} + \ldots + q_n. \end{aligned}$$

Pour que φ soit divisible par ψ, il faut et il suffit que le polynôme P *soit divisible par le polynôme* Q.

En effet, pour que φ soit divisible par ψ, il faut et il suffit que f le soit par g, ou que PF soit divisible par QG, ou enfin que $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{G}}$ soit fini dans un domaine de dimensions finies, contenant le point $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 0$; or F et G ne sont pas nuls à l'origine, ni dans le voisinage de l'origine; pour que

$\frac{\varphi}{\psi}$ reste fini, il faut et il suffit que $\frac{P}{Q}$ reste fini, ce qui exige que P soit divisible par Q.

V. — Sur les points singuliers.

Nous avons dit que l'ensemble des valeurs de $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ou des points représentés par ces variables constituait dans la théorie des fonctions de plusieurs variables un point analytique. En entendant le mot *point* dans ce sens :

Nous appellerons point *singulier* ou *critique* d'une fonction $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ un point où cette fonction cesse d'être monodrome, monogène, finie ou continue.

Nous distinguerons deux espèces de points critiques pour les fonctions f qui restent monodromes, c'est-à-dire qui n'ont qu'une seule valeur en chaque point. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un point critique; s'il existe une fonction $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ synectique en ce point et telle que fF n'ait plus le point $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pour point critique, nous dirons que ce point est un point critique *ordinaire* de f; s'il n'existe pas de fonction synectique en $a_1, a_2, \ldots, a_n$, telle que fF n'ait plus ce point pour point critique, on dira que le point critique en question est un point *essentiel* pour la fonction f.

Les points critiques ordinaires peuvent être des *infinis* ou des points d'*indétermination*. Puisqu'un point singulier ordinaire de la fonction f est un point tel qu'il existe une fonction synectique F jouissant de cette propriété que le produit $\varphi = f\mathrm{F}$ soit synectique, on en conclut que $f = \frac{\varphi}{\mathrm{F}}$; si φ est différent de zéro au point critique, f est infini en ce point et le point critique sera ce que l'on appelle un *infini;* mais, si φ et F sont nuls à la fois, il pourra arriver que φ soit divisible par F ; cependant nous devons faire abstraction de ce cas : le point considéré ne serait pas singulier; φ et F pourront se mettre sous les formes Pγ et QG (après leur avoir fait subir une substitution linéaire, si c'est nécessaire), P et Q

désignant des polynômes entiers en z, à coefficients synectiques en z_2, z_3, ... et γ, G désignant des fonctions synectiques. Le rapport $\frac{\gamma}{G}$ est bien déterminé, mais le rapport $\frac{P}{Q}$ est, en général, indéterminé et il dépend des rapports des variables ; on a alors ce que l'on appelle un *point d'indétermination.*

Ajoutons qu'un point à l'infini peut être singulier ; si en un point les variables z_1, z_2, ... sont infinies, le point sera dit singulier de même espèce que le point $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, ... de la fonction $f\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \ldots\right)$.

Théorème I. — *Une série entière, c'est-à-dire dont les différents termes* $V_0, V_1, \ldots, V_m, \ldots$ *sont des polynômes homogènes en* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *de degrés* $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots$, *respectivement et qui reste convergente pour toutes les valeurs finies de ces variables, a nécessairement un point essentiel à l'infini.*

Posons en effet

$$(1) \qquad f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = V_0 + V_1 + \ldots + V_m + \ldots;$$

si à l'infini $f(z_1, \ldots)$ ne présente pas de point essentiel, $f\left(\frac{1}{z'_1}, \frac{1}{z'_2}, \ldots, \frac{1}{z'_n}\right)$ n'en présentera pas non plus, en supposant nulle l'une des variables z', c'est-à-dire que $f\left(\frac{1}{z'_1}, \cdots\right)$ pourra se mettre sous la forme

$$(2) \qquad f\left(\frac{1}{z'_1}, \cdots\right) = \frac{G(z'_1, z'_2, \ldots, z'_n)}{H(z'_1, z'_2, \ldots, z'_n)},$$

G et H désignant des séries entières ou, si l'on veut, des fonctions synectiques à l'origine. Or, si cela était possible, en posant $z_1 = a_1 t, z_2 = a_2 t, \ldots, z_n = a_n t$ et $\varphi(t) = f(a_1 t, a_2 t, \ldots)$, (1) deviendrait

$$(3) \qquad \varphi(t) = A_0 + A_1 t + \ldots + A_m t^m + \ldots;$$

$\varphi(t)$ serait synectique par rapport à t et présenterait en général un point essentiel pour $t=\infty$ (nous supposons bien entendu, ce qui est possible, les a tels que les A ne soient pas identiquement nuls); la fonction $f\left(\frac{t}{a_1}, \frac{t}{a_2}, \ldots, \frac{t}{a_n}\right)$, a_1, a_2, ... n'étant pas nuls, serait également douée d'un point essentiel à l'infini et $f\left(\frac{1}{a_1 t}, \frac{1}{a_2 t}, \ldots, \frac{1}{a_n t}\right)$ d'un point essentiel à l'origine. Mais cette fonction s'obtient en faisant $z'_1 = a_1 t$, $z'_2 = a_2 t$, ... dans $f\left(\frac{1}{z'_1}, \ldots\right)$; on aurait donc

$$f\left(\frac{1}{a_1 t}, \frac{1}{a_2 t}, \ldots\right) = \frac{G(a_1 t, a_2 t, \ldots)}{H(a_1 t, a_2 t, \ldots)},$$

ce qui est absurde si l'origine est un point essentiel, $G(a_1 t, \ldots)$ et $H(a_1 t, \ldots)$ étant des séries convergentes ordonnées suivant les puissances croissantes de t.

Théorème II. — *Une fonction synectique en chacun de ses points, excepté à l'infini, et qui n'a pas de points essentiels même à l'infini, est un polynôme entier.*

Une pareille fonction, en effet, est développable par la série de Maclaurin et le développement doit avoir un nombre limité de termes; sans quoi, en vertu du précédent théorème, la fonction aurait un point essentiel à l'infini.

Théorème III. — *Une fonction toujours synectique, excepté en certains points singuliers, et qui n'a pas de points essentiels même à l'infini, est une fonction rationnelle.*

En effet, soit $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ une fonction sans points essentiels, mais synectique, excepté en certains points singuliers; si l'on donne à $z_2, \ldots, z_n$ des valeurs fixes, la fonction f se réduira à une fonction synectique de z_1, excepté en certains points où elle pourra être infinie sans avoir de points

essentiels ; elle sera donc rationnelle et pourra se mettre sous la forme

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{A_0 + A_1 z_1 + \ldots + A_p z_1^p}{B_0 + B_1 z_1 + \ldots + B_q z_1^q},$$

$A_0, A_1, \ldots, B_0, B_1, \ldots$ désignant des fonctions de $z_2, \ldots, z_n$.

Si, dans cette formule, on donne à z_1 des valeurs différentes en nombre égal à $p+q+1$, on aura $p+q+1$ équations du premier degré en $A_0, A_1, \ldots, B_0, B_1, \ldots$ qui détermineront les rapports de ces quantités à l'une d'elles, ces rapports dépendront de fonctions rationnelles des valeurs de $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ pour les diverses valeurs de z_1 ; ce seront donc des fonctions synectiques de $z_2, \ldots, z_n$, excepté en certains points singuliers non essentiels.

Considérons l'un de ces rapports, ou, si l'on veut, l'une des quantités A, B, on verra comme tout à l'heure qu'elle est rationnelle par rapport à z_2 et que ses coefficients sont synectiques par rapport à $z_3, z_4, \ldots, z_n$, excepté en des points singuliers non essentiels, et ainsi de suite. Donc

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

est rationnelle par rapport à toutes ses variables.

C. Q. F. D.

VI. — Sur les intégrales multiples des fonctions de variables imaginaires.

Le premier qui se soit occupé des intégrales doubles des fonctions de variables imaginaires est M. Marie (XLIV[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. — Sa théorie des fonctions imaginaires, *Comptes rendus*, 1853). En 1868, j'ai fait connaître une formule analogue à celle de Cauchy et qui permet, au moyen d'une intégrale multiple, d'exprimer une fonction des solutions de plusieurs équations simultanées ; enfin, MM. Picard et Poincaré ont essayé, ce dernier surtout (*Acta mathematica*, 1887), d'édifier la théorie générale des intégrales multiples des fonctions de variables imaginaires.

Nous allons analyser son Mémoire, en nous bornant au cas de deux variables.

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables imaginaires x, y, soit

$$x = \xi + \eta\sqrt{-1}, \qquad y = \xi' + \eta'\sqrt{-1};$$

imaginons que l'on établisse entre ξ, η, ξ', η' deux relations ou, si l'on veut, que l'on pose

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi_1(s, t), & \eta &= \varphi_2(s, t), \\ \xi' &= \varphi_3(s, t), & \eta' &= \varphi_4(s, t). \end{aligned}$$

Formons l'expression

$$\begin{aligned} f(x, y)\,dx\,dy &= f(x, y)(d\xi + d\eta\sqrt{-1})(d\xi' + d\eta'\sqrt{-1}) \\ &= f(x, y)[(d\xi\,d\xi' - d\eta\,d\eta') + \sqrt{-1}(d\xi\,d\eta' + d\eta\,d\xi')]; \end{aligned}$$

nous appellerons intégrale double de $f(x, y)\,dx\,dy$ et nous désignerons par le symbole

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy$$

l'expression

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \iint f(x, y)\Big[&\frac{\partial(\xi, \xi')}{\partial(s, t)} - \frac{\partial(\eta, \eta')}{\partial(s, t)} \\ &+ \sqrt{-1}\,\frac{\partial(\xi, \eta')}{\partial(s, t)} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial(\eta, \xi')}{\partial(s, t)}\Big]\,ds\,dt; \end{aligned} \right.$$

l'intégrale double en question est donc *a priori* susceptible d'une infinité de valeurs qui dépendent de la nature des relations établies entre ξ, ξ', η, η', s, t.

Si l'on considère le point défini dans l'hyperespace (t. III, p. 182) par les variables ξ, η, ξ', η', établir entre ces variables deux relations, c'est les obliger à décrire une variété à deux dimensions, une surface : l'intégrale (1) sera prise le long de cette surface qu'il faudra, pour achever de définir l'intégrale (1), limiter à un certain contour que l'on se donnera au moyen de certaines inégalités entre s et t; voilà donc le symbole

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy$$

nettement défini, et il ne nous reste plus qu'à faire connaître ses principales propriétés.

VII. — Sur une classe particulière d'intégrales doubles.

Désignons par f_{ij} une fonction des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui jouira des propriétés suivantes

$$f_{ij} = -f_{ji}, \qquad f_{ii} = 0;$$

posons dans cette fonction

$$x_1 = \varphi_1(s, t), \qquad x_2 = \varphi_2(s, t), \qquad \ldots,$$

et considérons l'intégrale double

$$V = \int\int \sum f_{ij} \frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(s, t)} ds\, dt$$

prise le long d'une certaine surface limitée par un contour fermé C, le signe $\sum$ devant s'étendre à un système de n valeurs données aux lettres i et j. On pourra encore écrire

$$V = \int\int \sum f_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial x_j}{\partial t} ds\, dt;$$

cherchons la condition pour que l'intégrale V ne dépende pas de la surface le long de laquelle on intègre quand le contour C reste invariable ; à cet effet, imaginons que les x deviennent fonctions d'un paramètre α et exprimons que $\frac{\partial V}{\partial \alpha}$ est nul ; on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \alpha} &= \int\int \sum \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha} \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial x_j}{\partial t} ds\, dt \\ &+ \int\int \sum f_{ij} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha \partial s} \frac{\partial x_j}{\partial t} ds\, dt \\ &+ \int\int \sum f_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial^2 x_j}{\partial \alpha \partial t} ds\, dt. \end{aligned}$$

Nous désignerons par A, B, C les intégrales qui figurent au second membre, en sorte que

$$(1) \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha} = A + B + C;$$

on a

$$A = \iint \sum \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha} \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial x_j}{\partial t}\, ds\, dt,$$

$$B = \iint \sum f_{ij} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha\, \partial s} \frac{\partial x_j}{\partial t}\, ds\, dt.$$

Intégrant par parties et observant que, sur le contour limitateur de la surface, les x ne varient pas,

$$B = -\iint \sum \left[f_{ij} \frac{\partial^2 x_j}{\partial s\, \partial t} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \sum \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial s} \frac{\partial x_j}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} \right] ds\, dt;$$

on trouve de même

$$C = -\iint \sum \left[f_{ij} \frac{\partial^2 x_i}{\partial s\, \partial t} \frac{\partial x_j}{\partial \alpha} + \sum \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial x_j}{\partial \alpha} \right] ds\, dt,$$

et, par suite, la formule (1) devient, en observant que les termes en f_{ij} se détruisent,

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \iint \sum ds\, dt\, \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} \left[\frac{\partial x_k}{\partial \alpha} \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial x_j}{\partial t} - \frac{\partial x_k}{\partial s} \frac{\partial x_j}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial x_k}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial x_j}{\partial \alpha} \right].$$

On peut encore écrire cette formule ainsi

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \iint \sum ds\, dt \left[\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{ki}}{\partial x_j} \right] \frac{\partial(x_k, x_i, x_j)}{\partial(\alpha, s, t)},$$

et alors, pour que $\frac{\partial V}{\partial \alpha}$ soit nul, il faut que le coefficient de $\frac{\partial(x_k, x_i, x_j)}{\partial(\alpha, s, t)}$ le soit, sans quoi on pourrait prendre ce déterminant de signe contraire à son coefficient et rendre $\frac{\partial V}{\partial \alpha}$ négatif. Ainsi, pour que l'intégrale V soit indépendante de la surface d'intégration, il faut et il suffit que l'on ait

$$(2) \qquad \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{ki}}{\partial x_j} = 0.$$

VIII. — Extension du théorème de Cauchy.

Par définition l'intégrale double $\iint f(x, y)\, dx\, dy$ est,

comme nous avons vu au § VI, la valeur de l'intégrale ordinaire

$$\iint f(x, y)\left[\frac{\partial(\xi, \xi')}{\partial(s, t)} - \frac{\partial(\eta, \eta')}{\partial(s, t)} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial(\xi, \eta')}{\partial(s, t)} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial(\eta, \xi')}{\partial(s, t)}\right] ds\, dt$$

ou, en remplaçant $f(x, y)$ par $X + Y\sqrt{-1}$,

$$\iint\Big[(X + Y\sqrt{-1})\frac{\partial(\xi, \xi')}{\partial(s, t)} + (X\sqrt{-1} - Y)\frac{\partial(\xi, \eta')}{\partial(s, t)} + (X\sqrt{-1} - Y)\frac{\partial(\eta, \xi')}{\partial(s, t)} - (X + Y\sqrt{-1})\frac{\partial(\eta, \eta')}{\partial(s, t)}\Big] ds\, dt.$$

Les quantités f_{ij} sont, en posant

$$\xi = x_1, \qquad \eta = x_2, \qquad \xi' = x_3, \qquad \eta' = x_4,$$

$$f_{11} = 0, \qquad f_{12} = 0, \qquad f_{13} = X + Y\sqrt{-1}, \qquad f_{14} = X\sqrt{-1} - Y,$$

$$f_{22} = 0, \qquad f_{23} = X\sqrt{-1} - Y, \qquad f_{24} = -X - Y\sqrt{-1},$$

$$f_{33} = 0, \qquad f_{34} = 0, \qquad f_{44} = 0;$$

et il est facile de voir que les relations analogues à la formule (2) du paragraphe précédent sont

$$\frac{\partial(X\sqrt{-1} - Y)}{\partial\xi} - \frac{\partial(X + Y\sqrt{-1})}{\partial\eta} = 0,$$

$$\frac{\partial(X + Y\sqrt{-1})}{\partial\xi} - \frac{\partial(X\sqrt{-1} - Y)}{\partial\eta} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

lesquelles sont satisfaites en vertu des relations

$$\frac{\partial X}{\partial\xi} = \frac{\partial Y}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial X}{\partial\eta} = -\frac{\partial Y}{\partial\xi},$$

$$\frac{\partial X}{\partial\xi'} = \frac{\partial Y}{\partial\eta'}, \qquad \frac{\partial X}{\partial\eta'} = -\frac{\partial Y}{\partial\xi'}.$$

On peut donc dire que :

L'intégrale $\iint f(x, y)\,dx\,dy$ est indépendante de la surface le long de laquelle on la prend, le contour qui limite

cette surface restant le même, pourvu que, en se déformant, la surface d'intégration ne rencontre pas de point pour lequel la fonction f cesserait d'être synectique.

Si nous conservons le nom de *points critiques* aux points de l'hyperespace ξ, ξ', η, η', pour lesquels la fonction f cesse d'être synectique, ces points formeront une surface continue, au moins en général, car l'équation

$$f(x, y) = \infty \qquad \text{ou} \qquad X_1 + Y_1\sqrt{-1} = 0$$

se décompose en deux $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$ entre quatre variables ξ, η, ξ', η'.

Nous bornerons à ces quelques notions la théorie des intégrales multiples, dont il n'a pas encore été fait beaucoup d'applications.

CHAPITRE II.

THÉORIE DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES.

I. — De l'irréductibilité.

Une fonction rationnelle de plusieurs quantités, a, b, c, ... est le quotient de deux polynômes entiers par rapport à ces quantités; mais on donne parfois au mot *rationnel* un sens plus restreint : ainsi l'on dit qu'un polynôme en a, b, c, ... est rationnel quand ses coefficients numériques sont eux-mêmes des nombres rationnels.

Quand on veut étendre cette acception du mot *rationnel*, on dit quelquefois que l'on *adjoint* des quantités α, β, γ, ...; un polynôme qui n'était pas rationnel dans le sens que nous avons donné tout à l'heure devient rationnel, s'il l'est par rapport à a, b, c, ... et par rapport aux quantités adjointes α, β, γ, ...

Par exemple, $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ n'est pas un polynôme rationnel, mais il devient rationnel, si l'on *adjoint* le radical $\sqrt{2}$.

Les quantités adjointes peuvent être en nombre infini; on peut adjoindre, par exemple, toutes les irrationnelles réelles; on peut adjoindre tous les nombres, mais non les imaginaires; on peut adjoindre tous les nombres, même les nombres imaginaires. On peut adjoindre à un polynôme tous ses coefficients et même leurs racines carrées, etc. Un polynôme $F(x)$ entier en x est dit *irréductible* quand il n'admet pas de diviseur rationnel. Une équation algébrique $F(x) = 0$ est *irréductible* quand son premier membre est un polynôme irréductible.

L'irréductibilité d'un polynôme ou d'une équation dépend donc de la manière dont on définit les polynômes rationnels. Tel polynôme irréductible devient immédiatement réductible par l'*adjonction* de certaines quantités.

Par exemple, le polynôme $x^2 - 2$ est irréductible; mais il acquiert les diviseurs rationnels $x - \sqrt{2}$ et $x + \sqrt{2}$, si l'on adjoint l'irrationnelle $\sqrt{2}$.

Ainsi, toutes les fois que nous parlerons d'un polynôme ou d'une équation irréductible, il sera sous-entendu que la définition des quantités rationnelles a été donnée avec précision.

Nous commencerons par démontrer, ou par rappeler une proposition fondamentale sur les équations irréductibles.

Théorème. — *Si une équation algébrique* $f(x) = 0$, *dont le premier membre est un polynôme* $f(x)$ *rationnel, admet une racine d'une équation irréductible* $F(x) = 0$, *elle les admet toutes, et l'on a*

$$f(x) = [F(x)]^q Q, \tag{1}$$

q désignant un nombre entier et Q *un polynôme qui ne s'annule pas avec* $F(x)$.

En effet, si $f = 0$ et $F = 0$ ont une racine commune, f et F ont un diviseur commun D, qui sera nécessairement rationnel, puisqu'on pourra le trouver par la méthode du plus grand commun diviseur qui n'introduit pas d'irrationnalités autres que celles qui existent dans f et F et qui sont censées adjointes.

Ce diviseur commun ne peut être que $F(x)$; car, si $F(x)$ avait un diviseur autre que lui-même et rationnel, il ne serait pas irréductible; de deux choses l'une, ou $\frac{f(x)}{F(x)}$ et $F(x)$ n'ont pas de diviseur commun, ou $F(x)$ est encore ce diviseur commun, et ainsi de suite; si $f(x)$ admet le diviseur $[F(x)]^q$,

et si $\frac{f(x)}{[F(x)]^q}$ n'admet plus de diviseur commun avec $f(x)$, on aura

$$\frac{f(x)}{[F(x)]^q} = Q,$$

Q désignant un polynôme entier, ce qui démontre la formule (1).

Le théorème en vertu duquel, si une équation à coefficients réels admet n fois $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ pour racine, elle admet aussi n fois la racine $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, est un corollaire de celui-ci ; dans ce cas,

$$F(x) = (x - \alpha - \beta\sqrt{-1})(x - \alpha + \beta\sqrt{-1}) = (x - \alpha)^2 + \beta^2.$$

II. — Des fonctions algébriques.

On appelle *fonction algébrique de plusieurs variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une fonction y de ces variables dont la valeur est donnée par une équation irréductible

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0,$$

c'est-à-dire telle que f désigne un polynôme entier en x_1, $x_2, \ldots, x_n, y$ n'admettant aucun diviseur rationnel par rapport à ces variables. Sont donc considérées comme adjointes toutes les quantités indépendantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et y.

Nous n'étudierons guère dans ce qui va suivre que les fonctions algébriques d'une seule variable ; elles sont définies, d'après ce que l'on vient de dire, par des équations irréductibles de la forme

$$f(x, y) = 0,$$

c'est-à-dire telles que $f(x, y)$ désigne un polynôme qui n'admet pas de diviseur entier en x et y. Si $f(x, y)$ admettait un tel diviseur, il pourrait se décomposer en facteurs $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y), \ldots$ irréductibles, et alors chacune des équations

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0, \qquad \ldots$$

servirait à définir une fonction algébrique : toutes ces fonctions algébriques seraient en général distinctes.

C'est ce qui ressortira plus clairement de l'étude que nous allons faire aux paragraphes suivants. Bornons-nous à faire observer que les équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ne peuvent définir des valeurs de y toujours égales, quel que soit x, que si φ et ψ sont identiques à un facteur constant près, puisque ces deux équations sont irréductibles.

Une fonction algébrique ne peut satisfaire à la fois à deux équations irréductibles différentes.

Sans quoi, ces équations auraient un facteur commun nécessairement rationnel, puisqu'il serait donné par la méthode du plus grand commun diviseur, et ne seraient pas irréductibles.

L'*ordre* d'une fonction algébrique est l'ordre de l'équation irréductible qui sert à la définir : cet ordre est compté ordinairement par rapport aux deux variables x et y, mais on peut l'estimer quelquefois par rapport à la seule variable y.

Une fonction algébrique, d'après ce que l'on a vu (t. III, p. 348), est continue, monodrome et monogène à l'intérieur de tout contour ne contenant pas de point pour lequel l'équation irréductible qui la définit acquiert une racine *multiple* ou *infinie*.

III. — Théorème fondamental de Gallois.

Soient

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

une équation algébrique, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ *ses racines; soit*

$$V = \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

une fonction rationnelle de ces racines qui prenne $n!$ *valeurs distinctes quand on permute les lettres* $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$; *si les racines* $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ *sont inégales, on pourra exprimer* $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *rationnellement au moyen de* V.

[La fonction $f(x)$ n'est pas nécessairement irréductible.]

En effet, permutons dans V les racines $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de toutes les manières possibles, V prendra $1.2\ldots(n-1)=\mu$ valeurs distinctes $V_0, V_1, \ldots, V_{\mu-1}$ et l'équation

$$(V-V_0)(V-V_1)\ldots(V-V_{\mu-1})=0,$$

qui aura pour racines V_0, V_1, ..., pourra se mettre sous la forme

$$(2) \qquad F(V, x_0)=0,$$

$F(V, x_0)$ désignant une fonction rationnelle de V et de x_0: car les coefficients de cette équation en V sont fonctions symétriques des racines $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de l'équation

$$\frac{f(x)}{x-x_0}=0,$$

et sont rationnels en x_0. Mais, l'équation (2) ayant pour racine V_0, on a

$$F(V_0, x_0)=0.$$

Donc l'équation

$$(3) \qquad F(V_0, x)=0$$

a pour racine x_0; les équations (1) et (3) ont donc une racine commune. Je dis qu'elles n'en ont qu'une, et, en effet, si elles en avaient une autre, x_1 par exemple, on aurait

$$F(V_0, x_1)=0,$$

ce qui est absurde, car on a

$$F(V, x_0)=(V-V_0)(V-V_1)\ldots$$

et, en changeant x_0 en x_1 et x_1 en x_0,

$$F(V, x_1)=(V-V'_0)(V-V'_1)\ldots,$$

$V'_0, V'_1, \ldots$ désignant ce que deviennent $V_0, V_1, \ldots$ quand on permute x_0 et x_1. Ces valeurs par hypothèse sont différentes de $V_0, V_1, \ldots$, donc on ne saurait avoir $F(V_0, x_1)=0$; les équations (1), (3) n'ont donc que la seule racine commune x_0,

que l'on pourra trouver par les méthodes connues, et qui sera fonction rationnelle de V_0 : on aura de même les autres racines.

Remarque. — $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ étant fonctions rationnelles de V_0, V_1 sera fonction rationnelle de V_0 : on voit donc que toutes les racines de l'équation $F(V, x_0)$ s'expriment rationnellement au moyen de l'une d'elles.

Corollaire I. — *Étant données tant de fonctions algébriques que l'on voudra, on peut les considérer comme fonctions rationnelles d'une même fonction algébrique.*

Si les fonctions algébriques données sont distinctes, on pourra toujours former une équation (E) réductible ou non, admettant ces fonctions algébriques pour racines et n'ayant pas de racines égales : il suffira pour cela de multiplier entre elles les équations irréductibles auxquelles satisfont les fonctions données. L'équation résultante n'aura pas de racines égales, car les équations irréductibles données n'ont pas non plus de racines doubles; sans quoi elles admettraient des diviseurs rationnels fournis par la méthode des racines égales; les équations irréductibles en question n'ont pas non plus de racines communes, sans quoi elles ne seraient pas distinctes, et l'on n'emploiera une équation irréductible qu'une fois, quand deux des fonctions données satisferont à cette équation.

Alors, en vertu du théorème que nous venons d'établir, les racines de l'équation (E), parmi lesquelles sont nos fonctions algébriques données, pourront s'exprimer en fonction rationnelle d'une fonction des racines de (E) convenablement choisie.

IV. — Étude et classification des points critiques.

On appelle *point critique d'une fonction,* comme l'on sait, tous ceux où cette fonction cesse d'être monodrome, monogène, finie ou continue.

Les fonctions algébriques possèdent deux espèces de points critiques : les *pôles* où elles deviennent infinies sans cesser d'être monodromes, et les points *algébriques* ou de *ramification,* autour desquels elles cessent d'être monodromes; un point critique peut être à la fois un pôle et un point de ramification.

La classification des points critiques des fonctions algébriques a été faite par Puiseux (t. XV du *Journal de Liouville,* 1re série) à peu près comme il suit :

Considérons l'équation irréductible de degré m

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Les points critiques que nous étudierons tout d'abord seront censés tels que y y reste fini; ils sont alors donnés, comme nous l'avons fait observer (t. III, p. 348), par les équations

$$f = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

ou

$$f_2 = 0, \tag{2}$$

en dénotant par $f_1, f_2, f_{11}, \ldots$ les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ldots$. Cette équation (2) ne saurait être identique, sans quoi (1) aurait une racine double quel que soit x et admettrait un diviseur rationnel; elle ne serait donc pas irréductible, comme on l'a supposé.

Soit donc a, b une solution commune aux équations (1) et (2). Posons

$$x = a + \xi, \qquad y = b + \eta;$$

l'équation (1) deviendra

$$f(a + \xi, b + \eta) = 0.$$

Si l'on développe son premier membre par la formule de Taylor, elle prend la forme

$$\sum A_{\alpha\beta} \xi^\alpha \eta^\beta = 0; \tag{3}$$

elle ne contiendra pas de terme indépendant de ξ et η, car ce terme est $f(a, b) = 0$; elle ne contiendra pas non plus de terme en η, car le coefficient de ce terme est $f_2(a, b) = 0$; mais elle contiendra un terme au moins indépendant de η et un terme indépendant de ξ, sans quoi elle serait divisible par η ou par ξ; $f(x, y)$ serait divisible par $y - b$ ou $x - a$, et l'équation (1) ne serait pas irréductible.

Ceci posé, on sait que l'on peut, soit par la méthode (t. II, p. 149) algébrique de Minding, soit par la méthode géométrique de Newton, trouver les racines η infiniment petites d'ordre ν par rapport à ξ; toutes les racines η infiniment petites par rapport à ξ sont d'ailleurs d'un ordre fini et commensurable.

Nous supposerons donc que l'équation (3) possède n_1 racines d'ordre ν_1, n_2 racines d'ordre ν_2, ..., n_μ racines d'ordre ν_μ. Considérons en général le groupe des n racines d'ordre ν : l'équation (3) pourra se mettre sous la forme

$$\varphi(\eta, \xi^\nu) + \varepsilon = 0,$$

φ désignant un polynôme homogène en η et ξ^ν, et ε désignant un infiniment petit d'ordre supérieur. Si l'on considère l'équation

$$(4) \qquad \varphi(\alpha, 1) = 0,$$

elle aura n racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, et les racines d'ordre ν de l'équation (3) auront pour valeurs approchées $\alpha_1 \xi^\nu$, $\alpha_2 \xi^\nu$, ..., car $\frac{\eta}{\xi^\nu}$ aura pour $\xi = 0$ les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$.

Si ν est entier, les valeurs approchées de η seront monodromes autour du point o, et il en sera de même des valeurs exactes; en effet, les valeurs exactes de $\frac{\eta}{\xi^\nu}$ diffèrent infiniment peu des valeurs approchées α; on peut donc poser $\frac{\eta}{\xi^\nu} = \alpha + \omega$, ω désignant un infiniment petit, et alors on aura

$$\eta = \xi^\nu \alpha + \omega \xi^\nu.$$

Les diverses valeurs exactes différeront donc des valeurs approchées d'infiniment moins que celles-ci ne diffèrent entre elles, et, par suite, ne sauraient se permuter les unes dans les autres. Ce raisonnement toutefois tomberait en défaut si l'équation (4) avait des racines égales. Nous reviendrons sur ce cas tout à l'heure.

Si ν est fractionnaire de la forme $\frac{p}{q}$, q et p étant premiers entre eux, les valeurs approchées $\alpha_1 \xi^\nu$, $\alpha_2 \xi^\nu$, ... ne seront pas monodromes autour de l'origine; en effet, si l'on pose $\xi = re^{\theta\sqrt{-1}}$ et si l'on fait varier θ de 2π, $\xi^\nu = r^\nu e^{\frac{p}{q}\theta\sqrt{-1}}$ sera multiplié par $e^{\frac{2p\pi}{q}\sqrt{-1}}$ et ne reprendra sa valeur primitive que quand le point ξ aura tourné q fois autour de l'origine (ou le point x q fois autour du point a). Mais, les diverses valeurs approchées de η étant racines de $\varphi(\eta, \xi^\nu) = 0$, il faut que ces valeurs se permutent les unes dans les autres; il en sera de même des valeurs exactes de η, car elles ne diffèrent des valeurs approchées que de quantités infiniment moindres que celles dont elles diffèrent entre elles.

Les racines d'ordre ν se partageront donc en groupes de racines se permutant les unes dans les autres, ou restant monodromes si ν est entier. Cette conclusion ne tombera en défaut que si l'équation (4) a des racines égales.

Supposons donc que l'équation (4) ait des racines égales; changeons encore de variables et posons

$$\frac{\eta}{\xi^\nu} = \eta',$$

l'équation (1) pourra s'écrire

$$\varphi(\eta', 1) + \varepsilon_1 = 0,$$

ε_1 étant un infiniment petit; soit α' une racine multiple de

$$\varphi(\eta', 1) = 0;$$

posons

$$\eta' = \alpha' + \eta'',$$

l'équation précédente prendra la forme

$$\Sigma A'_{\alpha\beta} \eta''^{\alpha} \xi^{\beta} = 0,$$

$A'_{\alpha\beta}$ désignant un coefficient constant. On discutera cette équation comme l'équation proposée.

En résumé, on voit qu'autour d'un point où $f(x, y) = 0$ acquiert des racines égales, les diverses valeurs de y qui deviennent égales se partagent en groupes de racines se permutant les unes dans les autres quand le point x tourne autour du point critique, un groupe pouvant d'ailleurs ne contenir qu'une seule racine, qui, par suite, est monodrome.

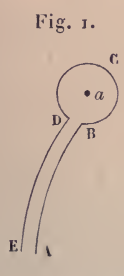
La discussion précédente ne s'applique pas au point situé à l'infini; mais, si ce point est critique, on posera $x = \frac{1}{x'}$ dans l'équation $f(x, y) = 0$, et l'on étudiera facilement les variations de y provenant des variations de x dans le voisinage du point à l'infini en faisant varier le point x' autour de l'origine.

Il reste à examiner ce qui se passe autour d'un pôle de la fonction y, c'est-à-dire autour d'un point qui rend cette fonction infinie; on le fera en changeant y en $\frac{1}{y'}$, dans l'équation $f(x, y) = 0$; les variations de y' feront alors connaître celles de y.

V. — Des lacets.

Soit a (*fig.* 1) un point critique d'une fonction quelconque; autour du point a comme centre décrivons un cercle BCD de

Fig. 1.



rayon infiniment petit, imaginons que l'on enlève une portion

infiniment petite DB de la circonférence et que l'on fasse partir de B et D deux lignes infiniment rapprochées l'une de l'autre, AB et DE ne se coupant pas, la figure ainsi formée porte le nom de *lacet relatif au point critique a*. Le lacet ainsi formé est censé parcouru dans un certain sens : ce sens est *direct* si le point décrivant a l'intérieur du lacet à sa gauche; le sens est rétrograde dans le cas contraire. D'ailleurs l'aire infiniment petite du lacet ne doit contenir aucun autre point critique que le point a, le contour même étant à ce point de vue censé faire partie intégrante de l'aire. Supposons le lacet parcouru dans le sens direct par un mobile qui partira alors du point A; ce point A est l'*origine* ou l'*entrée* du lacet, le point E placé vis-à-vis en est l'*extrémité* ou la *sortie*, AB et DE sont les *bords* du lacet. Le bord que l'on parcourt en ayant l'aire du lacet à gauche ou quand on chemine dans le sens direct est le *bord droit*, l'autre est le *bord gauche;* on dit aussi la *droite* et la *gauche* du lacet. La portion BCD est la *circonférence* du lacet.

VI. — Variation d'une fonction algébrique le long d'un contour quelconque.

Considérons maintenant un chemin quelconque C allant de x_0 en x_1; donnons-nous en x_0 la valeur initiale de la fonction algébrique y, et proposons-nous de calculer la valeur que prendra y en x_1, si l'on fait suivre à la variable x le chemin donné C.

Observons à cet effet que l'on peut remplacer le chemin C par un autre C′ provenant de la déformation continue du premier, pourvu que, entre deux chemins successifs conduisant de la forme C à la forme C′, il n'existe aucun point critique algébrique de la fonction y; ou, si l'on veut, pourvu que, dans sa déformation, le chemin ne rencontre aucun point critique algébrique, car entre ces deux chemins successifs la fonction restera monodrome.

Imaginons qu'en chaque point critique on plante un piquet

rond et que, attachant un fil en x_0, on lui fasse suivre le contour donné C et traverser un anneau planté en x_1 ; cela fait, tirons le fil en x_1 de manière à le tendre ; en se déformant, ce fil figurera divers chemins conduisant à la même valeur de y en C_1 que le contour primitif; car jamais le fil ne pourra franchir un point critique, grâce à l'action des piquets fichés en ces points ; considérons alors le fil complètement tendu ; il affecte la forme d'un polygone ayant ses sommets en x_0, en x_1 et aux points critiques : seulement quelques côtés pourront être formés de la juxtaposition de plusieurs brins ; de même les piquets plantés aux points critiques pourront être partiellement embrassés ou complètement entourés une ou plusieurs fois par le fil.

Imaginons alors que, laissant le fil libre de glisser dans l'anneau x_1, on vienne pincer chaque côté du polygone et tirer le fil de manière à l'amener en x_0 ; enfin, entre le fil et chaque piquet embrassé par le fil, introduisons un piquet et tirons avec ce nouveau piquet de manière à amener le fil en x_0 : la nouvelle figure affectée alors par le fil constituera encore un chemin équivalent à C, mais ce chemin est évidemment composé de lacets suivis du chemin rectiligne $x_0 x_1$; donc :

Théorème. — *Quand il s'agit de savoir quelle valeur prend une fonction algébrique y en un point x_1 quand la variable suit un chemin $x_0\, x_1$, la valeur de y au point de départ étant y_0, on peut remplacer ce chemin par un autre formé d'une série de lacets ayant leur origine en x_0 et du chemin rectiligne $x_0\, x_1$.*

Il ne reste plus qu'à étudier l'effet d'un lacet. Supposons qu'à l'entrée du lacet la valeur de la fonction y soit y_0 ; lorsque la variable x, suivant le bord droit, sera arrivée sur le petit cercle y, elle y acquerra la valeur y'_0 ; quand la variable x aura décrit le petit cercle et sera venue sur le bord gauche du lacet, ou bien y reprendra la valeur y'_0 et le point critique sera de nul effet sur la valeur considérée de y, ou bien y acquerra la valeur y'_1 différente de y'_0 et le long du bord

gauche du lacet y prendra des valeurs différentes de celles qu'il avait sur le bord droit, car le long des bords du lacet il n'existe pas de point pour lesquels la différence de deux valeurs de y soit infiniment petite; y reviendra donc en x_0 avec une valeur différente de sa valeur initiale.

Dans le premier cas, on dit que le lacet est *inactif;* dans le second, il est *actif.*

Théorème. — *Si l'on part du point x_0 avec la valeur initiale y_1 de y, il existera toujours un contour fermé tel qu'en revenant en x_0 après l'avoir parcouru, y prenne une quelconque y_i des valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_m$ racines de l'équation $f(x_0, y) = 0$,*

$$(1) \qquad f(x, y) = 0$$

désignant l'équation irréductible qui définit y.

En effet, supposons que y ne puisse prendre en x_0 que les valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_i$, i étant $< m$, lesquelles se permuteront alors exclusivement les unes dans les autres. Formons les fonctions symétriques

$$A_1 = y_1 + y_2 + \ldots + y_i,$$

$$A_2 = y_1 y_2 + y_1 y_3 + \ldots + y_{i-1} y_i, \quad \ldots, \quad A_i = y_1 y_2 \ldots y_i;$$

l'équation

$$(2) \qquad y^i - A_1 y^{i-1} + \ldots \pm A_i = 0$$

définira une fonction algébrique de x de degré $i < m$, car A_1, A_2, ... sont des fonctions rationnelles de x; en effet, elles sont monodromes, monogènes, et n'admettent qu'un nombre limité d'infinis, qui sont ceux de $y_1, y_2, \ldots, y_i$. Mais ceci est absurde : en effet, l'équation irréductible (1) admettrait pour diviseur le premier membre de (2) qui est rationnel et peut se mettre sous la forme entière.

VII. — Développement d'une fonction algébrique dans le voisinage d'un point critique.

Soit $x = a$, $y = b$ un point critique pour la fonction y algébrique définie par l'équation irréductible

$$f(x, y) = 0;$$

les diverses valeurs de y autour de ce point sont les unes monodromes, les autres susceptibles de se permuter entre elles autour du point a. Les premières sont développables par la formule de Taylor, nous n'avons rien à en dire; les autres se partagent en groupes, et, dans chaque groupe, toutes les racines de ce groupe se permutent circulairement les unes dans les autres quand le point x tourne autour de a. Soient y_1, $y_2, \ldots, y_i$ les valeurs de y qui se permutent ainsi les unes dans les autres et qui forment un groupe; posons $x - a = t^i$, y_1 par exemple, pourra être considéré comme fonction de t; or, quand le point x a effectué i révolutions autour du point a, $(x-a)^{\frac{1}{i}}$ ou t a repris sa valeur initiale, ainsi que y_1; donc y_1 est fonction monodrome de t et, par suite, il est développable suivant les puissances de t. On peut donc poser

$$y_1 = \mathrm{A} + \mathrm{B}t + \mathrm{C}t^2 + \ldots$$

ou

$$y_1 = \mathrm{A} + \mathrm{B}(x-a)^{\frac{1}{i}} + \mathrm{C}(x-a)^{\frac{2}{i}} + \ldots.$$

Ainsi, *en général, dans le voisinage d'un point critique a, qui n'est pas un infini, la fonction algébrique est développable suivant les puissances entières d'une racine de $x - a$.*

Le développement peut d'ailleurs servir à représenter tout un groupe de racines.

Si le point a est un infini, sans être un point critique algébrique, le développement de y pourra se faire suivant les puissances positives et négatives entières de $x - a$; si le

point a est à la fois un pôle et un point de ramification, le développement aura lieu suivant les puissances positives et négatives d'une racine de $x - a$.

Disons enfin que, de la théorie des asymptotes, il résulte que, en général, il existe, pour $x = \infty$, des développements de la fonction y sous la forme

$$y = Cx + C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots,$$

C, C_0, C_1, ... désignant des constantes, si le point à l'infini n'est pas critique; s'il est critique, on aura les développements correspondants en changeant x en $\frac{1}{x}$ et y en $\frac{1}{y}$ dans l'équation qui sert à définir la fonction y.

VIII. — Des cycles.

Soit

$$A t^m + B t^\beta + C t^\gamma + \ldots$$

une série ordonnée suivant les puissances entières positives et croissantes de t, dans laquelle A et m sont différents de zéro, et où A, B, C, ... sont indépendants de t; supposons cette série convergente dans un cercle de rayon fini ou infini décrit de l'origine comme centre, la courbe ou la portion de courbe représentée par l'équation

$$(1) \qquad y - b = A(x - a)^{\frac{m}{n}} + B(x - a)^{\frac{\beta}{n}} + \ldots,$$

a, b désignant des constantes quelconques et n un entier positif, est ce que l'on appelle un *cycle*. Ce cycle peut aussi être représenté par les deux équations

$$(2) \qquad x - a = t^n, \qquad y - b = A t^m + B t^\beta + C t^\gamma + \ldots,$$

et nous supposerons que les nombres m, β, γ, ..., n n'ont pas de diviseur commun.

En vertu de la théorie que nous avons exposée aux para-

graphes précédents, t pourra se développer en série ordonnée suivant les puissances de $(y-b)^{\frac{1}{m}}$ et, par suite, $x-a$ aussi, en sorte que le cycle pourra de même être représenté par une équation de la forme

$$x-a=A'(y-b)^{\frac{n}{m}}+B'(y-b)^{\frac{p}{m}}+\ldots,$$

$A', B', \ldots$ désignant des constantes, $m, n, p, \ldots$ des entiers. Soumettons le cycle (1) à une transformation de coordonnées tout à fait générale, transportons l'origine en un point quelconque a', b' et appelons x', y' les nouvelles coordonnées; les formules de transformation seront

$$x'-a'=\lambda\,(x-a)+\mu\,(y-b),$$
$$y'-b'=\lambda'(x-a)+\mu'(y-b),$$

λ, μ, λ', μ' désignant des constantes. Ces formules donnent

$$x'-a'=\lambda\,t^n+\mu\,A\,t^m+\ldots,$$
$$y'-b'=\lambda'\,t^n+\mu'A\,t^m+\ldots.$$

Si les formules de la transformation des coordonnées sont tout à fait générales, $x'-a'$ et $y'-b'$ sont développables en séries ordonnées suivant les puissances entières de t et les premiers termes de ces séries seront du même ordre par rapport à t.

Il faut conclure de là que, *si les axes de coordonnées sont quelconques, les nombres m et n sont égaux et l'on a*

$$x-a=t^n, \qquad y-b=A\,t^n+B\,t^{n+1}+\ldots.$$

Effectuons encore une transformation de coordonnées; on aura

$$x'-a'=(\lambda+\mu\,A)t^n+\ldots,$$
$$y'-b'=(\lambda'+\mu'A)t^n+\ldots,$$

et, si l'on détermine la transformation de manière que

$$\lambda'+\mu'A=0,$$

le premier terme du développement de y sera d'ordre supé-

rieur au premier terme du développement de x. L'ordre du premier terme du développement de x ne peut pas s'élever en même temps, car il faudrait qu'on pût l'abaisser par une transformation inverse, ce qui est impossible; c'est d'ailleurs ce que l'on vérifie directement en mettant à la place de λ, μ, λ', μ' leurs valeurs en fonction des angles dont les axes ont tourné. Quoi qu'il en soit, par un choix convenable d'axes, les équations du cycle pourront être présentées sous la forme

$$\begin{aligned} y-b &= \mathrm{A}\,t^{n+\nu} + \mathrm{B}\,t^{n+\nu+1} + \ldots, \\ x-a &= \mathrm{M}\,t^{n} + \mathrm{N}\,t^{n+1} + \ldots, \end{aligned}$$

A, B, ..., M, N, ... désignant des constantes, ou sous la forme

$$(3)\qquad y-b = \mathrm{G}(x-a)^{\frac{n+\nu}{n}} + \mathrm{H}(x-a)^{\frac{n+\nu+1}{n}} + \ldots$$

ou encore

$$(4)\qquad x-a = t^n, \qquad y-b = \mathrm{A}\,t^{n+\nu} + \mathrm{B}\,t^{n+\nu+1} + \ldots,$$

G, H, ..., A, ... désignant toujours des constantes.

Lorsqu'un cycle est représenté par une équation de la forme (3) ou (4) (si les fractions qui servent d'exposants à $x-a$ ne peuvent avoir de plus petit dénominateur commun que n), le nombre n est ce que l'on appelle l'*ordre* du cycle, le nombre ν est sa *classe*, le point a, b est l'*origine* du cycle.

Lorsque $n > 1$, l'origine est un point singulier par lequel passent n branches de courbes réelles ou imaginaires; ces branches ont toutes avec l'axe des x un contact d'ordre $\frac{\nu}{n}$ en général fractionnaire, elles ont entre elles un contact de même ordre au moins; exceptionnellement, le contact pourra être d'ordre plus élevé.

Théorème. — *Si l'on coupe un cycle par une droite infiniment voisine de l'origine, et non parallèle à la tangente, elle le rencontre en un nombre de points infiniment voisins de l'origine, égal à son ordre. Si la droite*

en question était parallèle à la tangente, le nombre de points d'intersection infiniment voisins de l'origine serait égal à l'ordre augmenté de la classe.

Cela résulte de la considération de l'équation (3); si les axes sont quelconques, $\nu = 0$ et la droite $y = b + \varepsilon$ coupe la courbe en n points infiniment voisins de a, b; si l'axe des x est tangent au cycle, $\nu > 0$, et la parallèle $y = b + \varepsilon$ à la tangente coupe en $n + \nu$ points infiniment voisins de a, b.

C. Q. F. D.

IX. — Cycles des courbes algébriques.

D'après la théorie des points critiques de M. Puiseux, on sait que, dans le voisinage d'un point critique, les diverses valeurs de la fonction y, définie par l'équation irréductible

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

se distribuent en groupes de valeurs se permutant les unes dans les autres. Les valeurs d'un même groupe sont données par une équation de la forme

$$y - b = \mathrm{A}(x - a)^{\frac{\alpha}{n}} + \mathrm{B}(x - a)^{\frac{\beta}{n}} + \ldots, \tag{2}$$

a, b désignant les coordonnées du point critique. Cette équation représente un cycle qui fait partie de la courbe (1); nous dirons que ce cycle est un cycle de la fonction y ou de la courbe $f = 0$.

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction rationnelle de x et y, le cycle (2) peut être représenté par les équations

$$x - a = t^n, \qquad y - b = \mathrm{A}\, t^n + \ldots,$$

si les axes de coordonnées sont quelconques, et alors on a, dans le voisinage du point a, b,

$$\varphi(x, y) = \varphi(a + t^n, b + \mathrm{A}\, t^n + \ldots);$$

φ pourra se développer suivant les puissances de t et, par suite,

sera d'un ordre infinitésimal entier par rapport à t : c'est ce que nous appellerons l'*ordre* de φ (qui peut être positif, nul ou négatif) *par rapport au cycle considéré;* si la fonction φ contenait les dérivées de y, son ordre se définirait encore de la même façon : ce serait son ordre infinitésimal par rapport à t ou à $(x-a)^{\frac{1}{n}}$.

On peut donner de l'ordre de φ une autre définition : soient, pour le cycle considéré, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les valeurs de y correspondant à une même valeur de x, la fonction

$$\Phi = \varphi(x, y_1)\varphi(x, y_2)\ldots\varphi(x, y_n)$$

est monodrome autour du point a, le point a est pour elle un zéro dont l'ordre de multiplicité (ordre par rapport à $x-a$) est égal à l'ordre de φ, par rapport à t ou à $(x-a)^{\frac{1}{n}}$; ainsi, pour avoir l'ordre de φ, il suffit d'évaluer le degré de multiplicité du zéro de la fonction symétrique Φ (¹). L'ordre de φ pourra donc être représenté par l'intégrale

$$(3) \qquad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\Phi'(z)\,dz}{\Phi(z)}$$

prise autour du point a.

Théorème. — *La somme des ordres d'une fonction rationnelle $\varphi(x, y)$ relatifs à tous les cycles de la courbe algébrique $f(x, y) = 0$ est nulle.*

En effet, cela revient à dire que le nombre des zéros, moins le nombre des infinis de la fonction rationnelle

$$\varphi(x, y_1)\varphi(x, y_2)\ldots\varphi(x, y_m),$$

où $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sont les valeurs de y pour une même valeur de x, est nul.

Théorème. — *Une transformation de coordonnées n'altère pas l'ordre d'une fonction par rapport à un cycle.*

(¹) En considérant un infini comme un zéro d'ordre négatif.

En effet, considérons le cycle

$$x - a = t^n, \qquad y - b = A t^{n+\nu} + \ldots$$

et la fonction

$$\varphi(x - a, y - b).$$

Effectuons la transformation de coordonnées

$$x' - a' = \lambda(x - a) + \mu(y - b),$$
$$y' - b' = \lambda'(x - a) + \mu'(y - \beta);$$

les équations du cycle deviendront

$$x' - a' = \lambda t^n + \mu A t^{n+\nu} + \ldots,$$
$$y' - b' = \lambda' t^n + \mu' A t^{n+\nu} + \ldots;$$

si donc on pose

$$x' - a' = t'^n,$$

les nouvelles équations du cycle seront

$$x' - a' = t'^n, \qquad y' - b' = G t'^n + \ldots,$$

et l'on aura

$$t'^n = \lambda t^n + \mu A t^{n+\nu} + \ldots.$$

t' est donc de même ordre que t; or l'ordre de la fonction φ par rapport aux anciens axes est l'ordre infinitésimal de $\varphi(t^n, A t^{n+\nu} + \ldots)$ par rapport à t et, par suite, par rapport à t' : c'est donc l'ordre de φ dans le nouveau système d'axes qui est quelconque; donc enfin une transformation de coordonnées n'altère pas l'ordre d'une fonction par rapport à un cycle.

X. — Intersection d'un cycle et d'une courbe.

Coupons le cycle

(1) $$x = t^n, \qquad y = A t^{n+\nu} + \ldots,$$

rapporté à son origine et à sa tangente, par la courbe

(2) $$\varphi(x, y) = 0,$$

que nous supposerons passer très près de l'origine des coordonnées qui est l'origine du cycle. Si nous tirons x et y de (1) pour les porter dans (2), nous aurons

$$\varphi(t^n, \mathrm{A}t^{n+\nu}+\ldots)=0;$$

le nombre de solutions t infiniment petites de cette équation sera le nombre de points d'intersection de la courbe (2) avec le cycle, infiniment voisins de l'origine; or le nombre de ces solutions infiniment petites est précisément l'ordre de la fonction φ dépourvue de son terme constant. On peut donc dire que *l'ordre d'une fonction φ par rapport à un cycle* C *est le nombre de points confondus à l'origine de ce cycle, dans lesquels la courbe $\varphi = 0$ coupe le cycle.*

XI. — Somme des ordres de contact de deux cycles.

Soient y et y' les ordonnées de deux cycles de même origine, nous aurons besoin de savoir évaluer la somme des ordres de contact des diverses branches de ces cycles; la méthode consistera tout simplement à évaluer l'ordre par rapport à x de la différence $y-y'$ pour toutes les branches des deux cycles et à faire la somme des ordres ainsi obtenus; cela ne présente aucune difficulté quand on connaît les développements de y et de y'.

Théorème I. — *La somme des ordres de contact des branches de deux cycles est toujours un nombre entier.*

En effet, soient

$$y=\mathrm{A}x^{\alpha}+\ldots, \qquad y'=\mathrm{A}'x^{\alpha'}+\ldots.$$

les équations des deux cycles que j'appellerai C et C'.

Cherchons d'abord la somme des ordres de contact de toutes les branches du cycle C avec l'une des branches du cycle C'; appelons $y_1, y_2, \ldots$ les diverses valeurs de l'ordonnée y pour une même valeur de x et $y'_1, y'_2, \ldots$ les diverses valeurs, correspondant à la même valeur de x, de l'ordonnée y'; ce

qu'il faut d'abord évaluer, c'est la somme des ordres des différences $y_1 - y'_1$, $y_2 - y'_1$, $y_3 - y'_1$, ..., c'est l'ordre de leur produit $(y_1 - y'_1)(y_2 - y'_1)(y_3 - y'_1)\ldots$; mais le produit $(y_1 - y)(y_2 - y)(y_3 - y)\ldots$ est une fonction monodrome et monogène de x et de y autour de l'origine du cycle; on peut la représenter par $\psi(x, y)$, en sorte que ce qu'il s'agit d'évaluer, c'est l'ordre infinitésimal de $\psi(x, y'_1)$ quand on remplace y'_1 par son développement. La somme des ordres que nous cherchons est l'ordre de $\psi(x, y'_1)\psi(x, y'_2)\ldots$; cette fonction est monodrome autour de l'origine des cycles : or l'ordre d'une fonction monodrome de x est nécessairement entier par rapport à x ; donc, etc. C. Q. F. D.

Théorème II. — *Quand deux courbes passent en un point* M, *elles se coupent en un certain nombre* N *de points confondus; si l'on désigne par p le nombre de branches de la première courbe passant en* M, *par q le nombre de branches de la seconde courbe passant en* M *et par s la somme des ordres de contact de toutes les branches de la première courbe avec celle de la seconde, on aura*

$$N = pq + s.$$

Supposons, en effet, que l'on ait pris le point M pour origine des coordonnées; soient alors

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0$$

les équations des deux courbes; résolvons ces équations, et soient $y_1, y_2, \ldots$ les racines de la première, $y'_1, y'_2, \ldots$ celles de la seconde : la résultante des deux équations sera $\Pi(y_i - y'_j) = 0$; l'ordre de produit $\Pi(y_i - y'_j)$ pour de petites valeurs de x sera le nombre des intersections des deux courbes confondues à l'origine; cet ordre sera aussi l'ordre du produit des binômes $y_i - y'_j$ qui contiennent seulement les ordonnées des cycles relatifs à l'origine; or ce produit est précisément $2pq + s$, somme des ordres de contact des cycles des deux courbes, qui sont relatifs à l'origine, diminuée de pq : ce qui démontre le théorème énoncé.

XII. — Classification des points singuliers.

D'après ce que l'on vient de voir, on peut partager les points singuliers en deux catégories, les points singuliers à *tangentes séparées* et les points singuliers présentant des *tangentes confondues*.

Les points singuliers d'ordre k à tangentes séparées peuvent être considérés comme résultant de la réunion de $\frac{k(k-1)}{2}$ *points de la courbe.*

Les points singuliers d'ordre p à tangentes confondues peuvent être considérés comme résultant de la réunion de $\frac{k(k-1)}{2}$ *points de la courbe, plus d'autant de points qu'il y a d'unités dans la somme s des ordres des contacts des diverses branches, somme qui est un nombre entier. On dira qu'en un tel point la courbe se coupe elle-même*

$$\left[\frac{k(k-1)}{2}+s\right] \text{fois.}$$

En effet, il est naturel, par analogie avec ce qui a lieu pour l'intersection de deux courbes distinctes, de dire que le nombre des points d'intersection d'une courbe avec elle-même dans le voisinage d'un point singulier est l'ordre du produit des différences $y_i - y_j$ des ordonnées de deux branches dans le voisinage du point singulier, ou, ce qui revient au même, l'ordre du produit de toutes les différences $\Pi(y_i - y_j)$ des racines de l'équation qui représente la courbe; or l'ordre de ce produit est aussi la somme s des ordres des contacts des diverses branches qui se croisent au point singulier augmenté du nombre de combinaisons $\frac{k(k-1)}{2}$ de ces branches prises deux à deux, c'est-à-dire $\frac{k(k-1)}{2}+s$.

Il est à remarquer qu'il arrivera souvent que ce nombre sera fractionnaire, mais son double sera entier.

REMARQUE. — *On voit, et ceci est important pour ce qui suivra, que l'ordre du premier membre de l'équation aux carrés des différences des racines y de l'équation d'une courbe en un point singulier est le double du nombre de points d'intersection de la courbe avec elle-même en ce point, le nombre d'intersections étant fictivement estimé comme il vient d'être dit.*

CHAPITRE III.

SUR LA TRANSFORMATION DES FIGURES PLANES.

I. — Diverses méthodes de transformation.

Soient x et y les coordonnées d'un point, si l'on pose deux relations telles que

$$(1) \qquad x = \varphi(x', y'), \qquad y = \psi(x', y'),$$

ou même, plus généralement,

$$\Phi(x, y, x', y') = 0, \qquad \Psi(x, y, x', y') = 0,$$

aux points x, y correspondront un ou plusieurs points x', y', et si le point (x, y) décrit une figure, le point correspondant (x', y') en décrira une autre. On dit que ces deux figures sont transformées l'une de l'autre.

Rien n'empêche de supposer que x', y' soient des coordonnées tangentielles : alors à un point de l'une des figures correspondra une droite dans l'autre, et les deux figures seront encore des transformées l'une de l'autre.

Nous commencerons par étudier les méthodes de transformation les plus simples, qui sont aussi les plus anciennes; ce sont évidemment celles dans lesquelles les équations (1) sont du premier degré, que x', y' représentent des coordonnées ordinaires ou des coordonnées tangentielles. Ce sont l'homographie et la corrélation, dont on doit l'idée première à Chasles et à Poncelet.

Notre but, en écrivant cet Ouvrage, est surtout de faire connaître les propriétés analytiques des fonctions, ainsi que

nous l'avons dit dans notre Préface; ce n'est que d'une façon accessoire que nous y présentons des applications et des développements géométriques. Il ne faudra donc pas considérer les théories que nous allons exposer comme un *Traité des propriétés projectives des figures :* c'est à peine si l'on peut envisager les quelques pages qui vont suivre comme une introduction à l'étude de ces propriétés. Nous nous bornerons à faire connaître les parties qui sont nécessaires à l'étude des fonctions algébriques. Nous renverrons le lecteur curieux d'approfondir l'étude des transformations des figures à la *Géométrie supérieure* de Chasles, à son Traité des *Sections coniques,* à son *Aperçu historique,* à ses Mémoires, au Traité des *Propriétés projectives* de Poncelet, aux Ouvrages de Plücker, de Cremona, de de Jonquières, etc. Un résumé, même succinct, des travaux de ces géomètres doublerait l'étendue de l'Ouvrage que nous écrivons.

II. — Définition des figures homographiques.

Soient x, y les coordonnées d'un point appartenant à une première figure, x', y' les coordonnées d'un point appartenant à une seconde figure : si l'on a

$$(1) \qquad x = \frac{ax' + by' + c}{a''x' + b''y' + c''}, \qquad y = \frac{a'x' + b'y' + c'}{a''x' + b''y' + c''},$$

$a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ désignant des constantes, on dira que les deux figures sont *homographiques,* ou transformées l'une de l'autre homographiquement. Pour justifier cette définition, il faut montrer que x' et y' sont des fonctions de x et y rationnelles dont les numérateurs et les dénominateurs sont du premier degré; à cet effet, rendons les équations (1) homogènes et écrivons-les ainsi

$$(2) \quad \frac{x}{ax' + by' + cz'} = \frac{y}{a'x' + b'y' + c'z'} = \frac{z}{a''x' + b''y' + c''z'}.$$

En désignant alors par $\frac{1}{t}$ la valeur commune de ces rapports, on a

$$a\,x'+b\,y'+c\,z'=tx,$$
$$a'\,x'+b'\,y'+c'\,z'=ty,$$
$$a''x'+b''y'+c''z'=tz;$$

on en conclut pour x', y', z' des valeurs fonctions linéaires de tx, ty, tz et homogènes : $\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}$ ou x' et y' seront donc de la forme indiquée en $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ ou en x et y.

Théorème I. — *Si, x, y, z désignant les coordonnées trilinéaires d'un point* M; *x', y', z' celles d'un autre point* M', *et si, a, b, c, ... désignant des constantes, on pose*

$$\frac{x}{ax'+by'+cz'}=\frac{y}{a'x'+b'y'+c'z'}=\frac{z}{a''x'+b''y'+c''z'},$$

les points M *et* M' *appartiendront à deux figures homographiques.*

En effet, entre les coordonnées rectilignes ordinaires de M et de M' il existera deux relations permettant d'exprimer les coordonnées de M en fonction des coordonnées de M', sous la forme de fractions ayant même dénominateur du premier degré et des numérateurs du premier degré aussi.

Je rappelle que le rapport anharmonique de quatre points a_1, a_2, a_3, a_4 en ligne droite est le rapport

$$\frac{a_2a_1}{a_2a_3}:\frac{a_4a_1}{a_4a_3},$$

et que le rapport anharmonique de quatre droites concourantes, oa_1, oa_2, oa_3, oa_4 est le rapport

$$\frac{\sin a_2oa_1}{\sin a_2oa_3}:\frac{\sin a_4oa_1}{\sin a_4oa_3},$$

qui d'ailleurs est égal au rapport anharmonique des quatre

points a_1, a_2, a_3, a_4 d'intersection des droites en question avec une transversale quelconque.

Si l'on désigne par P *et* Q *deux fonctions linéaires distinctes des coordonnées courantes (rectilignes ordinaires, homogènes ou trilinéaires), les droites concourantes représentées par les équations*

$$(1)\quad P-\lambda_1 Q=0,\quad P-\lambda_2 Q=0,\quad P-\lambda_3 Q=0,\quad P-\lambda_4 Q=0$$

auront pour rapport anharmonique

$$\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_3}:\frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_3}.$$

En effet, prenons les droites $P=0$, $Q=0$ pour axes des coordonnées, les équations (1) prendront la forme

$$y=k\lambda_1 x,\qquad y=k\lambda_2 x,\qquad y=k\lambda_3 x,\qquad y=k\lambda_4 x,$$

k désignant un rapport indépendant de x et y et de λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. Coupons les droites que représentent ces équations par la droite $x=\text{const.}=a$, les ordonnées des points d'intersection $k\lambda_1 a$, $k\lambda_2 a$, $k\lambda_3 a$, $k\lambda_4 a$ seront quatre segments dont les extrémités seront quatre points en ligne droite, ayant pour rapport anharmonique le rapport cherché; ce rapport est

$$\frac{ka\lambda_2-ka\lambda_1}{ka\lambda_2-ka\lambda_3}:\frac{ka\lambda_4-ka\lambda_1}{ka\lambda_4-ka\lambda_3},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_3}:\frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_3},$$

comme nous l'avions annoncé.

Lorsque le rapport anharmonique de quatre points est égal à -1, ces points forment une *division harmonique;* lorsque le rapport anharmonique de quatre droites est égal à -1, ces droites forment un *faisceau harmonique;* d'après cela, *les droites représentées par les équations*

$$P=0,\qquad Q=0,\qquad P+Q=0,\qquad P-Q=0$$

forment un faisceau harmonique.

Car elles donnent lieu à des segments o, ∞, ka, $-ka$ qui, écrits dans l'ordre $-ka$, ∞, ka, o, donnent pour rapport anharmonique -1.

III. — Propriétés fondamentales des figures homographiques.

Théorème I. — *Deux figures homographiques sont deux figures de même degré.*

Cela résulte de ce que, si l'on considère l'équation homogène d'une ligne, pour obtenir la figure homographique, il faut remplacer les coordonnées courantes par des fonctions linéaires de ces mêmes coordonnées.

Corollaire. — *Donc la figure homographique d'une droite est une droite.*

Cette conclusion, toutefois, ne sera entièrement exacte que si l'on considère les points à l'infini, $z = 0$, comme formant une ligne droite, *la droite de l'infini.* A cette droite de l'infini pourra correspondre, ou la droite de l'infini dans la figure homographique, ou une droite située à distance finie $a''x' + b''y' + c''z' = 0$.

Théorème II. — *A quatre points en ligne droite, ou à quatre droites concourantes, correspondent dans la figure homographique quatre points en ligne droite ou quatre droites concourantes ayant le même rapport anharmonique.*

Il suffit évidemment de prouver que deux faisceaux de quatre droites homographiques ont même rapport anharmonique, car une division formée par quatre points sur une droite a même rapport anharmonique qu'un faisceau de quatre droites passant par ces points.

Or tout faisceau de quatre droites peut être représenté par des équations de la forme

$$(1)\quad P - \lambda_1 Q = 0, \quad P - \lambda_2 Q = 0, \quad P - \lambda_3 Q = 0, \quad P - \lambda_4 Q = 0,$$

P et Q désignant des fonctions linéaires des coordonnées courantes x, y. La figure homographique sera représentée par les équations

$$(2)\quad P'-\lambda_1 Q'=0,\quad P'-\lambda_2 Q'=0,\quad P'-\lambda_3 Q'=0,\quad P'-\lambda_4 Q'=0,$$

où P′, Q′ désignent des fonctions linéaires des coordonnées courantes x' et y'; or le faisceau (1) et le faisceau (2), d'après ce que l'on a vu au paragraphe précédent, ont même rapport anharmonique $\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_3}:\dfrac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_3}$; donc, etc. C. Q. F. D.

Pour effectuer la transformation homographique donnée par les formules du paragraphe précédent,

$$\frac{x}{ax'+by'+cz'}=\frac{y}{a'x'+b'y'+c'z'}=\frac{z}{a''x'+b''y'+c''z'},$$

sur une figure donnée par son équation, on peut rendre cette équation homogène, la présenter sous la forme

$$f(x,y,z)=0,$$

où f désigne une fonction homogène, et faire la substitution linéaire

$$(3)\quad \begin{cases} x=ax'+by'+cz', \\ y=a'x'+b'y'+c'z, \\ z=a''x'+b''y'+c''z'. \end{cases}$$

La théorie de l'homographie est, à ce point de vue, l'interprétation géométrique de la théorie des substitutions linéaires. Quand on suppose les formules (3) résolues par rapport à x', y', z', on peut les mettre sous la forme

$$(4)\quad \begin{cases} x'=\alpha x+\beta y+\gamma z, \\ y'=\alpha' x+\beta' y+\gamma' z, \\ z'=\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z. \end{cases}$$

Considérons une courbe représentée par l'équation homogène

$$(5)\quad f(x,y,z)=0;$$

sa transformée aura pour équation

$$f(ax' + by' + cz', a'x' + \ldots) = 0;$$

l'expression

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z}$$

est un covariant et même un covariant absolu. Il en est de même de ses puissances symboliques; de là découlent les conditions suivantes :

Théorème III. — *La tangente à une courbe* C *a pour transformée homographique la tangente à la transformée de la courbe* C.

Et ce théorème ne souffrira pas d'exception, si l'on convient de considérer les asymptotes des courbes comme des tangentes à l'infini.

Théorème IV. — *Les polaires des différents ordres d'une courbe* C *ont pour transformées homographiques les polaires de même ordre de la transformée de* C.

Théorème V. — *La hessienne d'une courbe* C *a pour transformée homographique la hessienne de la transformée de* C.

Car le hessien d'une fonction est un covariant.

Théorème VI. — *Quand une courbe* C *présente un point singulier* M, *sa transformée homographique a aussi pour point singulier le point* M' *qui correspond à* M; *les deux points* M *et* M' *ont des singularités analogues.*

En effet, si la courbe C présente en M, dont les coordonnées sont x, y, z, un point multiple d'ordre p, les émanants

$$\left(X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z}\right)^i$$

sont identiquement nuls pour $i = 1, 2, \ldots, p-1$; les émanants

$$\left(X'\frac{\partial f}{\partial x'} + Y'\frac{\partial f}{\partial y'} + Z'\frac{\partial f}{\partial z'}\right)^i$$

correspondants seront donc aussi identiquement nuls; la transformée C′ de C aura donc en M′ un point multiple d'ordre p. Les tangentes en M et M′ aux nœuds auront respectivement pour équations

$$\left(X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}\right)^p=0, \tag{6}$$

$$\left(X'\frac{\partial f}{\partial x'}+Y'\frac{\partial f}{\partial y'}+Z'\frac{\partial f}{\partial z'}\right)^p=0; \tag{7}$$

si donc le nœud M présente deux tangentes confondues, le premier membre de (6) contiendra un facteur carré, il devra en être de même de (7) et, par suite, le nœud M′ présentera aussi deux tangentes confondues, etc.

Théorème VII. — *L'ordre du contact de deux courbes n'est pas altéré par une transformation homographique.*

En effet, deux courbes ont un contact d'ordre n, quand leurs dérivées, jusqu'à l'ordre n, sont proportionnelles, c'est-à-dire quand leurs émanants jusqu'au $n^{\text{ième}}$ inclusivement sont proportionnels quels que soient X, Y, Z, et alors leurs transformées ont aussi leurs émanants proportionnels jusqu'au $n^{\text{ième}}$ inclusivement, et par suite ont un contact d'ordre n.

C. Q. F. D.

IV. — Sur une méthode particulière pour effectuer les transformations homographiques.

Soient x, y, z les coordonnées trilinéaires d'un point rapporté à un triangle de référence T, dont le côté $z=0$ peut être, si l'on veut, la droite de l'infini; soient x', y', z' les coordonnées trilinéaires d'un autre point rapporté à un autre triangle de référence T′.

Si le point x, y, z décrit une certaine figure F, *le point x', y', z' ayant des coordonnées proportionnelles à x, y, z décrira une figure* F′ *homographique de* F *et,* réciproquement, *deux figures étant homographiques, on peut toujours supposer les figures rapportées à des triangles de*

référence, tels que les coordonnées d'un point de l'une soient proportionnelles aux coordonnées du point correspondant de l'autre.

En effet, rapportons les deux triangles T et T' à un même système d'axes rectangulaires, $O\xi$, $O\eta$; on aura

$$\begin{aligned} x &= a\xi + b\eta + c, & x' &= \alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma, \\ y &= a'\xi + b'\eta + c', & y' &= \alpha'\xi' + \beta'\eta' + \gamma', \\ z &= a''\xi + b''\eta + c'', & z' &= \alpha''\xi' + \beta''\eta' + \gamma'', \end{aligned}$$

$a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$ désignant des constantes déterminées. Si l'on pose alors

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z},$$

on aura entre les coordonnées ξ, η et ξ', η' des points correspondants les relations

$$(1) \qquad \frac{\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma}{a\xi + b\eta + c} = \frac{\alpha'\xi' + \beta'\eta' + \gamma'}{a'\xi + b'\eta + c'} = \frac{\alpha''\xi' + \beta''\eta' + \gamma''}{a''\xi + b''\eta + c''} = \rho;$$

si le déterminant $\Sigma \pm \alpha\beta'\gamma''$ n'est pas nul, c'est-à-dire si le triangle T' est un véritable triangle à surface finie ξ', η' et l'unité seront des fonctions du premier degré de ξ et η multipliées par ρ et, par suite, ξ' et η' seront de la forme

$$(2) \qquad \xi' = \frac{A\xi + B\eta + C}{A''\xi + B''\eta + C''}, \qquad \eta' = \frac{A'\xi + B'\eta + C'}{A''\xi + B''\eta + C''},$$

A, B, ... désignant des constantes, et *vice versa*.

Réciproquement, si l'on pose

$$x' = \alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma, \qquad y' = \alpha'\xi' + \beta'\eta' + \gamma',$$
$$z' = \alpha''\xi' + \beta''\eta' + \gamma'',$$

ces formules (2) donneront

$$\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma = x' = \frac{M\xi + N\eta + P}{A''\xi + B''\eta + C''},$$
$$y' = \frac{M'\xi + N'\eta + P'}{A''\xi + B''\eta + C''},$$
$$z' = \frac{M''\xi + N''\eta + P''}{A''\xi + B''\eta + C''},$$

M, N, ... désignant des constantes, d'où l'on déduira

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z},$$

x, y, z étant des fonctions linéaires de ξ et η et, par suite, des coordonnées trilinéaires relatives à un nouveau triangle de référence.

Cette proposition est importante : elle rend évidents les théorèmes énoncés au paragraphe précédent, elle permet en outre d'établir les théorèmes suivants :

Théorème I. — *La figure homographique d'un cycle est un cycle de même ordre et de même classe.*

Théorème II. — *Deux cycles homographiques sont tels que deux branches ont entre elles le même ordre de contact que leurs correspondantes.*

En effet, étant donnée l'équation de l'un des cycles, cette équation sera aussi l'équation du cycle homographique : les coordonnées seront seulement rapportées à un autre triangle de référence; l'ordre et la classe d'un cycle ne dépendant que de la forme de l'équation de ce cycle, le premier théorème est démontré. L'ordre du contact de deux courbes ne dépend que de l'ordre infinitésimal de la différence de deux coordonnées de même nom, les autres coordonnées étant les mêmes; par suite, l'ordre du contact de deux branches de courbes ne saurait être altéré par une transformation homographique, cet ordre fût-il fractionnaire ou incommensurable. Cette démonstration ne fait pas double emploi avec celle du théorème VII du paragraphe précédent, qui supposait essentiellement l'ordre du contact entier.

V. — Utilité de l'homographie.

Le but de l'homographie est de généraliser les propriétés des figures. Étant donnée une propriété d'une figure, en la

transformant homographiquement, on en déduit une propriété de la figure transformée.

En se plaçant à ce point de vue, une propriété d'une figure est exprimée analytiquement par une relation entre les coordonnées des divers points de cette figure; cette relation, transformée à l'aide des formules de l'homographie, fournit alors une autre relation qui est ordinairement une propriété plus générale d'une autre figure : je dis « plus générale » puisque la nouvelle relation contient tous les paramètres arbitraires qui entrent dans les formules de transformation. Si la transformation que l'on a fait subir à la figure est telle que les paramètres de la transformation soient tout à fait arbitraires, une nouvelle transformation homographique appliquée à la transformée ne fournira pas de résultat nouveau.

Il peut arriver qu'une propriété d'une figure soit exprimée par une équation qui ne contient que des covariants; la figure transformée jouit alors exactement de la même propriété que la figure primitive, et cette propriété, que l'on ne saurait généraliser par l'homographie, est alors ce que l'on appelle une propriété *projective*. Les propriétés projectives sont donc les plus importantes, puisque les autres en sont pour ainsi dire des cas particuliers.

Pour ne faire qu'une application de l'homographie, considérons deux droites parallèles A, A'; coupons-les par une série de droites parallèles entre elles, B, B', B'', . . ., nous formerons une série de parallélogrammes dont les centres seront sur une droite parallèle à A, A'. Si nous transformons la figure ainsi formée, les droites A, A' qui concouraient sur la droite de l'infini auront pour transformées deux droites concourantes ao et $a'o$, les droites B, B', B'', . . . deviendront des droites issues d'un point fixe ω, les parallélogrammes considérés tout à l'heure deviendront des quadrilatères quelconques; mais les points de concours de leurs diagonales seront encore en ligne droite et cette droite d passera en o; la droite D équidistante de A et A' formait avec ces droites et

la droite de l'infini un faisceau harmonique; donc les droites Od, Oa, Oa', $O\omega$ forment aussi un faisceau harmonique (p. 48, théorème II). C'est le théorème connu sur la polaire de deux droites, théorème qui ne peut plus être généralisé par l'homographie et qui est *projectif*.

Les propriétés non projectives sont appelées propriétés *métriques*.

Les formules de la transformation homographique

$$\frac{x}{ax'+by'+cz'} = \frac{y}{a'x'+b'y'+c'z'} = \frac{z}{a''x'+b''y'+c''z'}$$

renferment huit paramètres $a : b : c : \ldots : c''$, que l'on peut déterminer en se donnant arbitrairement quatre valeurs des rapports $x : y : z$ et les quatre valeurs des rapports correspondants $x' : y' : z'$. Ainsi :

Quand on veut transformer une figure homographiquement, on peut choisir quatre points et leur faire correspondre homographiquement quatre autres points à volonté.

Quatre points et leurs correspondants détermineront une transformation et une seule; il faudra pourtant que certains déterminants ne soient pas nuls : par exemple, à des points en ligne droite on ne pourra pas faire correspondre des points quelconques; à quatre droites quelconques on pourra aussi faire correspondre quatre droites données, et parmi ces droites pourra se trouver la droite de l'infini. Faire correspondre quatre droites à quatre droites, cela revient à faire correspondre quatre points de rencontre de ces droites aux points de rencontre des quatre correspondants, pourvu que l'on ne prenne pas parmi ces points trois d'entre eux en ligne droite.

On fait souvent correspondre aux deux ombilics du plan deux points réels ou imaginaires situés à distance finie. Les transformations que l'on obtient ainsi permettent de déduire les propriétés projectives d'une conique de celles du cercle,

qui peut se définir *une conique passant par les ombilics du plan*.

Deux coniques quelconques étant données, on peut toujours les regarder comme transformées homographiques de deux cercles; on les transforme en effet en deux cercles en faisant correspondre deux de leurs points d'intersection aux deux ombilics du plan.

En général, au moyen de l'homographie, on déduira les propriétés des coniques passant par deux points fixes des propriétés des cercles. Par exemple, de ce que :

Si d'un point fixe O on mène des tangentes aux cercles qui passent par les deux mêmes points, en ligne droite avec le point O, le lieu des points de contact sera un cercle.

On en conclut que :

Si d'un point fixe situé sur la corde commune à toutes les coniques qui passent par quatre points fixes on mène des tangentes à ces coniques, le lieu des points de contact sera une conique ayant une corde commune avec les coniques considérées.

Il est bon d'observer que deux droites rectangulaires forment un faisceau harmonique avec les droites isotropes passant par leur point de concours; elles correspondront donc homographiquement à des droites formant un faisceau harmonique avec des droites passant par deux points fixes correspondant aux ombilics du plan.

VI. — Usage de l'homographie pour l'étude des points situés à l'infini.

Si nous considérons une équation entre les coordonnées homogènes d'un ou de plusieurs points, cette équation exprimera une propriété de la figure formée par ces points; si maintenant, dans la même équation, on suppose que les lettres x, y, z, ..., au lieu de représenter des coordonnées homogènes, représentent des coordonnées trilinéaires, l'équa-

tion exprimera une propriété d'une figure homographique.

En effet, appelons ξ, η les coordonnées ordinaires du point dont x, y, z sont les coordonnées trilinéaires, x, y, z seront des fonctions linéaires de ξ, η; de sorte que, si l'on employait des coordonnées ordinaires, pour passer de la première figure à la seconde, il faudrait faire une substitution linéaire : la seconde figure et la première sont donc homographiques.

En se plaçant à ce point de vue, la droite de l'infini est remplacée par l'un des côtés $z = 0$ du triangle de référence, et les points situés à l'infini sont, en quelque sorte, rendus tangibles, *projetés*, comme l'on dit, sur la droite $z = 0$; ces considérations viennent encore justifier la locution dont nous nous sommes servis, de *droite de l'infini*.

VII. — Figures homologiques.

Étant données deux figures homographiques dans un même plan, il y a en général trois points qui sont à eux-mêmes leurs correspondants. En effet, si, dans les formules générales,

$$\frac{x'}{ax+by+cz} = \frac{y'}{a'x+b'y+c'z} = \frac{z'}{a''x+b''y+c''z},$$

on suppose $x' = x$, on a, pour déterminer les points qui sont leurs propres correspondants,

$$\frac{x}{ax+by+cz} = \frac{y}{a'x+b'y+c'z} = \frac{z}{a''x+b''y+c''z};$$

si l'on égale cette suite de rapports à $\frac{1}{s}$, on a

$$(1)\qquad \begin{cases} (a-s)x+by+cz=0, \\ a'x+(b'-s)y+c'z=0, \\ a''x+b''y+(c''-s)z=0. \end{cases}$$

L'élimination de x, y, z donne une équation en s du troisième degré, d'où l'on conclut qu'il existe trois systèmes de valeurs de x, y, z; donc, en général, il existera trois points qui seront à eux-mêmes leurs propres correspondants; il est

clair que, dans certains cas particuliers, il pourra y en avoir une infinité.

Ces trois points ne seront pas en général en ligne droite; mais supposons-les en ligne droite, la droite qui les contient se correspondra à elle-même. Soient a_1, a_2, a_3 ces trois points; si, sur la droite, on prend un quatrième point a_4, il se correspondra à lui-même, puisque, en appelant a'_4 son correspondant, le rapport anharmonique des points a_1, a_2, a_3, a_4 sera le même que celui des points a_1, a_2, a_3, a'_4. Ainsi, dans le cas où trois points doubles sont en ligne droite, il y a une infinité de points doubles; mais, appelant S le déterminant des équations (1), ses mineurs sont nuls et $\frac{\partial S}{\partial s}$ est nul; l'équation $S = 0$ a une racine double; si l'équation $S = 0$ n'a pas de racine triple, on voit que, indépendamment de la ligne des points doubles, il existera un point double, en général situé en dehors de cette ligne.

Plaçons-nous dans l'hypothèse où les points doubles forment un triangle; prenons ce triangle pour triangle de référence, les formules de transformation devront être satisfaites pour $x = 0, y = 0, x' = 0, y' = 0$: cela exige que $c = c' = 0$; on verrait de même que $a' = 0$, $a'' = 0$, $b = 0$, $b'' = 0$. Ces formules de transformation se réduiront donc à

$$(2) \qquad \frac{x'}{ax} = \frac{y'}{b'y} = \frac{z'}{c''z},$$

ce qui montre que la théorie des coordonnées trilinéaires doit donner les mêmes résultats que l'homographie, lorsque les coordonnées d'un point sont non pas les distances de ce point au triangle de référence, mais des quantités multiples de ces distances, le rapport restant indéterminé.

Mais, si l'on transporte la figure x, y, z d'une façon quelconque dans son plan, il faudra remplacer x, y, z par des fonctions linéaires de ces variables dépendant de trois paramètres arbitraires; si alors on forme les équations (1) pour les nouvelles valeurs de a, b, c, on pourra écrire que

les mineurs de s sont nuls, et l'on voit que, en général, on pourra déplacer l'une des figures, de manière qu'après le déplacement les figures aient en commun une infinité de points coïncidant avec leurs correspondants.

Si l'on prend la ligne double pour côté $z = 0$ du triangle de référence, et le point double isolé pour sommet opposé, les formules de transformation prendront la forme (2), l'équation en s se réduit à $(s - a)(s - b')(s - c'') = 0$, et, comme elle a une racine double, il faut, par exemple, que $a = b'$. Les deux figures sont alors dites *homologiques*. Les formules de l'homologie ramenées à leur forme la plus simple sont alors

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \lambda \frac{z}{z'}. \tag{3}$$

Le point $x = 0$, $y = 0$, est le *centre d'homologie*, la droite $z = 0$ est l'*axe d'homologie*.

Appelons O le centre d'homologie, D l'axe, M et M' les points correspondants dont les coordonnées sont respectivement x, y, z et x', y', z'; les équations (3) expriment que les points O, M, M' sont en ligne droite et que le rapport $\frac{\text{OM}}{\text{OM}'}$ est égal au rapport des distances du point M et du point M' à l'axe d'homologie, multiplié par une constante λ. Ce qui revient à dire que, si P est le point où la droite OMM' rencontre l'axe, on a

$$\frac{\text{OM}}{\text{OM}'} = \lambda \frac{\text{PM}}{\text{PM}'}.$$

Cette formule peut servir à construire le point homologue d'un point donné; à son inspection on voit que :

1° *Les deux droites joignant deux points et leurs correspondants se coupent sur l'axe d'homologie;*

2° *Les tangentes en deux points homologues de deux courbes homologiques concourent en un même point de l'axe.*

3° *Les tangentes à une courbe menées par le centre d'homologie sont tangentes à la courbe homologique.*

4° *L'axe d'homologie est une corde commune aux courbes homologiques.*

5° *Deux coniques quelconques sont homologiques de plusieurs manières; chaque point de concours de deux tangentes est un centre d'homologie, une corde commune lui correspond en qualité d'axe d'homologie;* etc.

On voit que les droites correspondantes de l'infini sont parallèles; donc, quand on voudra amener deux figures homographiques à être homologiques, il faudra d'abord rendre parallèles les droites correspondantes de l'infini, après quoi une simple translation de l'une des figures suffira pour assurer l'homologie.

Nous ne ferons pas d'application de l'homologie; disons seulement qu'elle peut servir à déduire du cercle une foule de propriétés des coniques : c'est ce que l'on peut voir dans les Œuvres de Chasles et de Poncelet, qui sont les inventeurs de l'homographie et de l'homologie.

Lorsque l'on suppose la droite $z = 0$ rejetée à l'infini, les formules (3) donnent

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \lambda;$$

les figures homologiques sont alors homothétiques : l'homothétie est donc un cas particulier de l'homologie, et par conséquent la similitude est un cas particulier de l'homographie.

Une dernière remarque, en terminant ces considérations très succinctes. Des formules de transformation algébriques telles qu'à un point et un seul d'une figure corresponde toujours un point et un seul de la figure transformée et *vice versa,* sont nécessairement les formules de l'homographie, car ces formules sont les seules qui soient du premier degré par rapport aux coordonnées de l'un ou l'autre système de variables.

VIII. — Digression sur les courbes du troisième ordre.

Une courbe du troisième degré a neuf points d'inflexion, car sa hessienne est de degré 3. Toutefois, comme une courbe du troisième degré peut posséder un point double, on voit que le nombre de ses points d'inflexion pourra être réduit à trois et même à un, si elle possède un rebroussement.

Parmi les courbes du troisième degré, il y en aura de la classe $3.2 = 6$; il y en aura de la classe 4 et de la classe 3, ainsi que le montrent les formules de Plücker.

Les points d'inflexion sont toujours trois à trois en ligne droite.

En effet, soient MM'M'' un triangle formé par les tangentes à trois points d'inflexion, A, A', A'' les points de contact : on aura, en vertu du théorème de Carnot,

$$\frac{\overline{\mathrm{MA}}^3 . \overline{\mathrm{M'A'}}^3 . \overline{\mathrm{M''A''}}^3}{\overline{\mathrm{MA'}}^3 . \overline{\mathrm{M'A''}}^3 . \overline{\mathrm{M''A}}^3} = -1,$$

Cette relation, après extraction de la racine cubique de ses deux membres, donne une relation qui prouve bien que les points A, A', A'' sont en ligne droite.

Rapportons la courbe à un point d'inflexion, la tangente étant prise pour axe des x; il faudra que, pour $y = 0$, l'équation en x ait trois racines nulles; elle sera donc de la forme

$$\varphi_3 + ay^2 + 2bxy + cy = 0,$$

φ_3 désignant un polynôme homogène du troisième degré. Soient O le point d'inflexion, OM'M'' une sécante et M un point sur cette sécante, tel que

$$\frac{2}{\mathrm{OM}} = \frac{1}{\mathrm{OM'}} + \frac{1}{\mathrm{OM''}} = \frac{\mathrm{OM'} + \mathrm{OM''}}{\mathrm{OM'} . \mathrm{OM''}}.$$

Le lieu du point M est une droite dite *polaire harmonique du point* O; en effet, soient

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

l'équation de OM : les coordonnées de M′ et M″ sont données par

$$r^2\varphi_3(\cos\theta, \sin\theta) + r(a\sin^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta) + c\sin\theta = 0;$$

il en résulte

$$\frac{\text{OM} + \text{OM}'}{\text{OM}\,.\,\text{OM}'} = -\frac{a\sin^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta}{c\sin\theta} = -\frac{a\sin\theta + 2b\cos\theta}{c};$$

donc

$$\frac{2}{\text{OM}} = -\frac{a\sin\theta + 2b\cos\theta}{c}.$$

Si l'on remplace OM par r, on a l'équation de la polaire harmonique

$$ay + 2bx + 2c = 0.$$

Supposons que le point d'inflexion O s'éloigne à l'infini : la polaire harmonique deviendra un diamètre rectiligne de la courbe pour les cordes parallèles à la direction dans laquelle le point O s'est éloigné.

Ainsi, par une transformation homographique ou même homologique, on pourra donner à la courbe un diamètre rectiligne, et même un axe; on peut faire mieux : prenons la tangente d'inflexion pour droite de l'infini, pour axe des x le diamètre et pour axe des y une perpendiculaire passant par le point d'inflexion à l'infini. Il n'entrera plus dans l'équation de termes en y et y^3, car la droite de l'infini étant tangente d'inflexion, quand on aura rendu l'équation homogène, pour $z = 0$, les termes du troisième degré en x et y devront former un cube parfait, ce qui exige que y n'y entre plus, puisque y^3 n'y entre pas. Ainsi :

Par une transformation homographique on ramène toute équation du troisième degré à la forme

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d;$$

une transformation de coordonnées fait disparaître le terme d, et l'on a, en général,

$$y^2 = x(x^2 + px + q) = x(x - \alpha)(x - \beta).$$

Si la courbe possède un point double à l'origine, on a $q = 0$ et son équation affecte la forme

$$y^2 = x^2(x - \alpha),$$

et si elle possède un rebroussement, la forme

$$y^2 = x^3,$$

qui représente la parabole semi-cubique.

IX. — Figures corrélatives.

Posons

$$\frac{x}{z} = \frac{a\xi + b\eta + c\zeta}{a''\xi + b''\eta + c''\zeta}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{a'\xi + b'\eta + c'\zeta}{a''\xi + b''\eta + c''\zeta},$$

et supposons que, x, y, z étant les coordonnées homogènes ordinaires d'une figure, ξ, η, ζ soient les coordonnées tangentielles homogènes d'une autre figure. Les deux figures en question sont dites *corrélatives;* elles jouiront des propriétés suivantes :

1° *La transformation n'altérant pas le degré des équations, à un point de la première figure correspondra une droite de la seconde et à une droite de la première figure un point et un seul de la seconde.*

2° *A une conique de la première figure correspondra une conique de la seconde.*

3° *En général, à une courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre correspondra une courbe de $m^{\text{ième}}$ classe et* vice versa.

4° *A deux droites qui se coupent correspondent deux points et la droite qui les joint.*

5° *A une droite tangente à une courbe correspond un point situé sur la courbe correspondante.*

6° *A deux courbes et à leurs intersections correspondent*

deux courbes et leurs tangentes communes et vice versa; *et en particulier à une courbe et à une droite avec les points d'intersection correspondent une courbe, un point et les tangentes issues de ce point, etc., etc.*

7° *A quatre points en ligne droite correspondent quatre droites concourantes, possédant le même rapport anharmonique.*

En effet, les équations tangentielles de quatre points en ligne droite peuvent être mises sous la forme

$$P + \lambda_1 Q = 0, \qquad P + \lambda_2 Q = 0, \qquad P + \lambda_3 Q = 0, \qquad P + \lambda_4 Q = 0;$$

une transformation corrélative donne les quatre droites concourantes,

$$p + \lambda_1 q = 0, \qquad p + \lambda_2 q = 0, \qquad p + \lambda_3 q = 0, \qquad p + \lambda_4 q = 0,$$

P, Q désignant des fonctions linéaires des coordonnées tangentielles ξ, η et p, q des fonctions linéaires des coordonnées ordinaires x, y; dans les deux cas, le rapport anharmonique est

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_3 - \lambda_4}.$$

Les figures polaires réciproques sont un exemple de figures corrélatives. Soit $S = 0$ l'équation de la conique directrice, la polaire du point x, y, z a pour équation

$$X \frac{\partial S}{\partial x} + Y \frac{\partial S}{\partial y} + Z \frac{\partial S}{\partial z} = 0,$$

les coordonnées tangentielles de cette droite sont

$$\xi = \frac{\partial S}{\partial x}, \qquad \eta = \frac{\partial S}{\partial y}, \qquad \zeta = \frac{\partial S}{\partial z},$$

elle correspond au point x, y, z, et les formules précédentes sont celles d'une transformation corrélative, puisque $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial S}{\partial y}$, $\frac{\partial S}{\partial z}$ sont du premier degré. Il est aisé de voir que deux figures corrélatives peuvent toujours être déplacées de manière à

pouvoir être considérées comme polaires réciproques, cette dernière transformation contenant cinq paramètres arbitraires.

Théorème. — *Toute figure* F *corrélative de la figure* F′ *est une figure homographique avec la polaire réciproque de* F′ *prise par rapport à une conique quelconque, en particulier avec la polaire réciproque de* F′ *relativement au cercle* $x^2+y^2+z^2=0$.

Cela revient à prouver que *deux figures corrélatives d'une troisième sont homographiques* : ce qui est évident. En effet, soient x, y, z et x', y', z' les coordonnées de deux points qui correspondent à la droite qui a pour coordonnées tangentielles ξ, η, ζ; on aura, en appelant $a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$ des constantes,

$$\frac{\xi}{ax+by+cz}=\frac{\eta}{a'x+b'y+c'z}=\frac{\zeta}{a''x+b''y+c''z},$$
$$\frac{\xi}{\alpha x'+\beta y'+\gamma z'}=\frac{\eta}{\alpha' x'+\beta' y'+\gamma' z'}=\frac{\zeta}{\alpha'' x'+\beta'' y'+\gamma'' z'},$$

l'élimination de ξ, η, ζ fournit entre x, y, z et x', y', z' des relations qui servent à définir une relation homographique.

En général, la théorie des figures corrélatives ne donnera donc rien de plus que la théorie de la transformation par polaires réciproques dont on peut faire remonter l'origine à Brianchon, mais qui a été particulièrement développée par Chasles et par Poncelet.

X. — Recherche de la classe d'une courbe algébrique et du nombre des points critiques d'une fonction algébrique.

Soit

$$(1) \qquad f(x, y)=0$$

une équation irréductible de degré m : elle représente une courbe de degré m : nous désignerons par n sa classe. Une transformation homographique n'altérant, ni le degré, ni la classe, ni la nature des points singuliers, on peut faire subir

à la courbe une telle transformation, de manière qu'il n'y ait pas de points singuliers à l'infini.

Ceci posé, soient α, β, γ les coordonnées homogènes d'un point quelconque du plan, et, l'équation (1) étant rendue homogène, considérons le covariant

$$\varphi = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z},$$

et évaluons la somme de ses ordres relativement aux cycles de $f = 0$. Cette somme devra être nulle (p. 38) :

1° Par rapport à un cycle dont l'origine est à l'infini, la courbe n'ayant plus de points singuliers à l'infini, l'ordre de φ sera $-(m-1)$; or la courbe $f = 0$ a m points à l'infini : donc la somme des ordres de φ relativement aux cycles ayant leur origine à l'infini est $-m(m-1)$.

Maintenant prenons l'ordre de φ par rapport à un cycle dont l'origine est à distance finie; φ ne s'annule qu'aux points de contact des tangentes issues du point α, β, γ et aux points singuliers; alors :

2° L'ordre de φ en un point de contact est évidemment égal à un, et par suite la somme des ordres de φ relativement à tous ces points est n, classe de la courbe.

3° L'ordre de φ relativement à un point singulier peut s'obtenir comme il suit : on effectuera une transformation homographique consistant à prendre $\alpha = 0$, $\gamma = 0$; alors φ se réduira à $\frac{\partial f}{\partial y}$, mais, quand on substitue dans $\frac{\partial f}{\partial y}$ les valeurs de y tirées de l'équation de la courbe, on obtient les produits des carrés des différences des valeurs de y. Pour avoir l'ordre de φ, il faudra prendre le produit des carrés de toutes les différences des valeurs de y qui s'annulent pour $x = 0$; mais ce produit (p. 43) est le double de ce que nous avons appelé le nombre des rencontres de la courbe avec elle-même. Il en résulte que la somme des ordres de φ est le double du nombre total des rencontres de la courbe avec elle-même. En appelant ce nombre δ, on a donc

$$-m(m-1) + n + 2\delta = 0$$

ou bien

$$n = m(m-1) - 2\delta.$$

Les points critiques de la fonction algébrique y définie par l'équation (1) sont ceux qui satisfont à l'équation $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$; toutefois les points singuliers à tangentes séparées ne sont pas critiques : le nombre w des points critiques sera donc n; s'il n'y a pas de points critiques à tangentes séparées et si l'on désigne par r le nombre des cycles d'ordre supérieur à un qui correspondent aux points critiques, on aura

$$w = n + r;$$

mais il faudra compter comme point critique double, triple, etc., celui où se réuniraient deux, trois, etc., cycles d'ordre supérieur à un.

XI. — Points d'inflexion d'une courbe algébrique.

Cherchons, pour l'égaler à zéro (p. 38), la somme des ordres de la fonction $\frac{d^2y}{dx^2}$ par rapport aux cycles de la courbe d'ordre m

$$f(x, y) = 0.$$

Nous aurons plusieurs espèces de cycles à considérer : la fonction $\frac{d^2y}{dx^2}$ s'annule aux points d'inflexion de $f = 0$; il y aura donc à considérer les cycles correspondant à ces points; elle devient infinie pour $x = \infty$ et aux points où $\frac{\partial f}{\partial y}$ est nul; d'ailleurs tous les points où $\frac{\partial f}{\partial y}$ est nul peuvent ne pas rendre $\frac{d^2y}{dx^2}$ infini : c'est ce qui peut arriver s'ils sont singuliers. Or on peut supposer que l'on a transformé les coordonnées, de telle sorte qu'aucun des points où la tangente est parallèle à l'axe des y ne soit singulier, et de telle sorte qu'aucune

asymptote de la courbe ne soit parallèle à l'axe des y. Ceci posé :

1° Les cycles relatifs aux points d'inflexion, c'est-à-dire pour lesquels on a $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, peuvent être représentés par des équations de la forme

$$y = Ax^p + \ldots,$$

où $p \geqq 3$, l'ordre est un, la classe ν est $p-1$. Si le point d'inflexion est ordinaire, on aura $p=3$, $\nu=2$,

$$y'' = p(p-1)x^{p-2} + \ldots$$

et l'ordre de $y''=\frac{d^2y}{dx^2}$ sera un ; si donc on considère un point pour lequel la classe est ν comme équivalent à $\nu-1=p-2$ points d'inflexion ordinaires, on pourra dire que chaque point d'inflexion fournit une unité à la somme des ordres de la fonction $\frac{d^2y}{dx^2}$.

2° Les cycles où $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ sont en nombre égal à la classe n de la courbe $f=0$, en ces points qui ne sont pas singuliers grâce à ce que les axes sont quelconques, on a

$$y - b = A(x-a)^{\frac{1}{2}} + B(x-a) + \ldots$$

et

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4}A(x-a)^{-\frac{3}{2}} + \ldots;$$

l'ordre de $\frac{d^2y}{dx^2}$ par rapport à $(x-a)^{\frac{1}{2}}$ est égal à -3 : donc les cycles où $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ fournissent chacun -3 unités à la somme des ordres de la fonction $\frac{d^2y}{dx^2}$.

3° Les cycles pour lesquels x est infini ont des équations de la forme

$$y = cx + c_0 + \frac{c_1}{x} + \ldots,$$

et ne correspondent pas à des points singuliers, puisque les axes des coordonnées sont quelconques; on en tire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{c_1}{x^3} + \ldots;$$

donc y'' est du troisième ordre par rapport à $\frac{1}{x}$, et chaque point à l'infini fournit 3 unités à la somme des ordres de y''.

En résumé, la somme des ordres de y'' est le nombre i des inflexions de $f = 0$, diminué de trois fois le nombre n des points où la tangente est parallèle aux y, et augmenté de trois fois le nombre m des points à l'infini; on a donc

$$i + 3m - 3n = 0$$

ou

$$i = 3(n - m).$$

Si la courbe $f = 0$ n'a pas de points singuliers, on a

$$n = m(m - 1)$$

et l'on retrouve la formule

$$i = 3m(m - 2);$$

c'est l'une des formules de Plücker, en supposant que la courbe $f = 0$ ne possède pas de singularités.

XII. — Transformations quadratiques.

Les formules de la transformation quadratique sont de la forme

$$x' = \frac{U}{W}, \qquad y' = \frac{V}{W},$$

U, V, W désignant trois polynômes du second degré en x, y. Ces formules peuvent être remplacées par les suivantes

(1) $$\frac{x'}{U} = \frac{y'}{V} = \frac{z'}{W},$$

où x', y', z' sont des coordonnées homogènes et où U, V, W

peuvent être censés fonctions de trois coordonnées homogènes x, y, z.

Nous n'étudierons que la transformation quadratique *birationnelle,* c'est-à-dire telle que l'on puisse déduire des formules (1), x, y, z en fonctions rationnelles de x', y', z'. Cherchons donc tout d'abord la condition pour que les formules (1) représentent une transformation birationnelle.

En général, si l'on se donne le point (x', y', z'), les équations (1) représenteront deux coniques ou même, si l'on veut, trois coniques

$$(2) \qquad \mathrm{W}y' - \mathrm{V}z' = 0, \qquad \mathrm{U}z' - \mathrm{W}x' = 0, \qquad \mathrm{V}x' - \mathrm{U}y' = 0,$$

dont les intersections x, y, z au nombre de quatre seront les points correspondants au point x', y', z'. Toutefois, si les coniques U, V, W avaient trois points, A, B, C communs, les coniques (1) ou (2) passeraient par ces trois points fixes et n'auraient plus qu'un seul point d'intersection variable, et dont les coordonnées seraient fonctions de x', y', z'; x, y, z seraient alors rationnels en x', y', z'. Supposons qu'il en soit ainsi.

Prenons le triangle ABC pour triangle de référence : les formules (1) prendront la forme

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{x'}{\mathrm{A}yz + \mathrm{B}xz + \mathrm{C}xy} &= \frac{y'}{\mathrm{A}'yz + \mathrm{B}'xz + \mathrm{C}'xy} \\ &= \frac{z'}{\mathrm{A}''yz + \mathrm{B}''xz + \mathrm{C}''xy}; \end{aligned} \right.$$

or, si l'on pose

$$\left.\begin{aligned} \lambda\mathrm{A} + \mu\mathrm{A}' + \nu\mathrm{A}'' &= 1 \\ \lambda\mathrm{B} + \mu\mathrm{B}' + \nu\mathrm{B}'' &= 0 \\ \lambda\mathrm{C} + \mu\mathrm{C}' + \nu\mathrm{C}'' &= 0 \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} \lambda''\mathrm{A} + \mu''\mathrm{A}' + \nu''\mathrm{A}'' &= 0 \\ \lambda''\mathrm{B} + \mu''\mathrm{B}' + \nu''\mathrm{B}'' &= 0 \\ \lambda''\mathrm{C} + \mu''\mathrm{C}' + \nu''\mathrm{C}'' &= 1 \end{aligned}\right|,$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda'\mathrm{A} + \mu'\mathrm{A}' + \nu'\mathrm{A}'' &= 0 \\ \lambda'\mathrm{B} + \mu'\mathrm{B}' + \nu'\mathrm{B}'' &= 1 \\ \lambda'\mathrm{C} + \mu'\mathrm{C}' + \nu'\mathrm{C}'' &= 0 \end{aligned}\right|,$$

les quantités λ, μ, ν, ... seront bien déterminées si l'on n'a pas

$$\begin{vmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire si les équations $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ sont distincts, et alors de (3) on déduira

$$\frac{\lambda x' + \mu y' + \nu z'}{yz} = \frac{\lambda' x' + \mu' y' + \nu' z'}{zx} = \frac{\lambda'' x' + \mu'' y' + \nu'' z'}{xy}.$$

Une transformation homographique de la figure x', y', z' ramènera ces formules à la forme

$$\frac{x'}{yz} = \frac{y'}{xz} = \frac{z'}{xy},$$

d'où l'on tire réciproquement

$$\frac{x}{y'z'} = \frac{y}{z'x'} = \frac{z}{x'y'},$$

de sorte qu'*au point* x, y, z *correspond un, et un seul point* x', y', z', *et* vice versa.

Considérons la transformation

$$(1) \qquad \frac{x}{y'z'} = \frac{y}{z'x'} = \frac{z}{x'y'},$$

qui donne

$$\frac{x'}{yz} = \frac{y'}{zx} = \frac{z'}{xy};$$

donnons-nous le point M de coordonnées x, y, z et voyons comment on construira le point correspondant M′ de coordonnées x', y', z'.

Soit ABC (*fig.* 2) le triangle de référence; soient $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ les équations de BC, CA et AB respectivement.

Le point M est à l'intersection des droites CK et AL, représentées par les équations

$$\frac{Y}{y} = \frac{X}{x}, \qquad \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z};$$

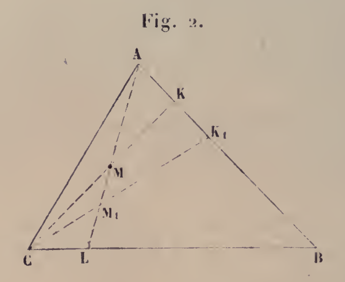
donc le point M′ est à l'intersection des droites

$$\frac{X}{y} = \frac{Y}{x}, \qquad \frac{Z}{y} = \frac{Y}{z},$$

que nous appellerons CK′ et AL′ (*fig.* 3).

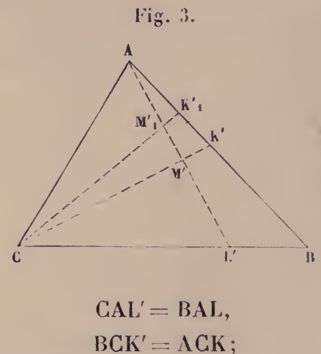
Pour rendre les choses plus claires, nous construirons le

Fig. 2.



point M′ sur une autre figure; CK′ et AL′ (*fig.* 3) seront des droites, telles que

Fig. 3.



$$CAL' = BAL,$$
$$BCK' = ACK;$$

donc :

1° *A un point* M *non situé sur le périmètre du triangle de référence correspond un point* M′ *non situé sur le périmètre de référence.*

2° *Si par le point* M *on imagine un déplacement dx, dy, dz, le point* M′ *subira un déplacement de même ordre dx', dy', dz', pourvu que* M *ne soit pas sur le périmètre du triangle de référence.*

3° Il résulte de là que, *si le point* M *est un point multiple d'une courbe, non situé sur le périmètre du triangle de référence, le point* M *sera un point multiple de même espèce de la courbe transformée.* Et par point de même espèce, il faut entendre non seulement un point de même ordre de multiplicité, mais encore un point ayant le même nombre de tangentes confondues, les branches de courbe tangentes ayant le même ordre de contact dans la courbe proposée et dans la transformée.

4° Supposons maintenant qu'une courbe ait en C un point multiple d'ordre ν : voyons comment sera situé son correspondant et quelle sera sa nature. A cet effet, prenons deux points M et M_1, sur deux branches de la courbe, voisins de C et en ligne droite avec A : leurs correspondants M' et M'_1 seront sur deux droites CM' et CM'_1, faisant entre elles le même angle que CM et CM_1, et très près de AB, de sorte que, *si le point multiple placé en* C *a ses tangentes séparées, à ce point correspondront* ν *points distincts sur* AB.

5° Supposons les points M et M_1 situés sur des branches de courbe ayant entre elles un contact d'ordre N; MM_1 sera d'ordre $N+1$ et $M'M'_1$ d'ordre N; aux branches tangentes en C correspondront donc deux branches tangentes de la courbe transformée n'ayant plus qu'un contact d'ordre $N-1$; ainsi donc, *si le point multiple placé en* C *a des tangentes confondues ayant des contacts d'ordre* $N, N', N'', \ldots$, *à chaque couple de ces branches correspondront d'autres branches ayant un contact d'ordre* $N-1, N'-1, N''-1, \ldots$.

De ces remarques découle un théorème de la plus haute importance.

Théorème. — *Au moyen d'une série de transformations quadratiques birationnelles, on peut toujours transformer une courbe algébrique quelconque, en une autre qui n'ait plus de points multiples à tangentes confondues.*

En effet, plaçons le sommet C du triangle de référence en un point multiple à tangentes confondues de la courbe à trans-

former, et choisissons le triangle de référence de telle sorte qu'aucun de ses côtés ne touche la courbe; la transformation quadratique pourra bien introduire de nouveaux points multiples, mais aucun d'eux n'aura de tangentes confondues. Quant au point C, il a été remplacé par d'autres points simples ou multiples avec des branches ayant un contact d'un ordre moins élevé d'une unité que dans la courbe primitive.

En opérant successivement des transformations analogues, on pourra introduire de nouveaux points multiples, mais à tangentes séparées, et l'on finira par faire disparaître tout contact entre les branches qui passent par un point singulier. Ce théorème est de M. Nöther.

XIII. — Nouvelle espèce de formules de transformation des fonctions algébriques.

Considérons deux courbes algébriques

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

$$f'(x', y') = 0. \tag{2}$$

Si l'on établit entre les coordonnées x, y; x', y' une relation algébrique,

$$\varphi(x, x'; y, y') = 0; \tag{3}$$

si l'on se donne le point (x', y') sur la courbe (2), x et y se trouveront déterminés au moyen des équations (1) et (3) sur la courbe (1) et *vice versa;* le point (x, y) étant donné sur la courbe (1), x' et y' seront déterminés au moyen des équations (2), (3).

Ainsi, en vertu de la relation (3) qui établit une *correspondance* entre les points (x, y) et (x', y') situés sur les courbes (1) et (2) respectivement, à un point de la courbe (1) correspondront, par exemple, k' points de la courbe (2), et à un point de la courbe (2) correspondront k points de la courbe (1).

Si une correspondance est telle qu'à un point de (1) cor-

responde un point seulement de (2) et *vice versa,* en d'autres termes, si $k = k' = 1$, on dit que la correspondance est *uniforme,* ou encore que les courbes (1) se correspondent *point par point.*

Pour obtenir une courbe qui corresponde uniformément ou point par point à la courbe (1), il suffit en général de poser

$$x' = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}, \qquad y' = \frac{\chi(x, y)}{\psi(x, y)}, \tag{4}$$

φ, χ, ψ désignant trois polynômes entiers ; si l'on élimine x et y entre (1) et (4), on tombe sur une équation, telle que (2), qui représente une courbe (2) correspondant point par point à (1).

En effet, si l'équation (2) est satisfaite, les équations (1) et (4) ont une solution commune x, y. Si cette solution commune est unique (ce qui a lieu le plus souvent), x et y s'exprimeront rationnellement en fonction de x' et y'.

Ainsi, en général, une transformation, telle que (4), rationnelle, appliquée à une courbe algébrique, la transforme en une autre qui lui correspond point par point, et l'on passe de la courbe transformée à la courbe primitive au moyen d'une transformation de même forme que celle qui sert à passer de la courbe primitive à sa transformée.

Il y aura donc une infinité de manières de former des équations de courbes qui se correspondent point par point.

XIV. — Théorème de la conservation du genre.

Considérons deux courbes C et C' se correspondant point par point, c'est-à-dire de telle sorte qu'à un point de l'une corresponde un point et un seul de l'autre. Soient x et y les coordonnées d'un point de C ; x' et y' les coordonnées du point correspondant de C' : alors x et y seront fonctions rationnelles de x' et de y', et *vice versa* d'ailleurs. Nous supposerons

$$x = \frac{\varphi(x', y')}{\psi(x', y')}, \qquad y = \frac{\chi(x', y')}{\psi(x', y')},$$

φ, χ, ψ désignant des polynômes dont le degré sera s.

Soient a, b, c des constantes quelconques : considérons la fonction linéaire de x' et y'

$$\theta = a\varphi + b\chi + c\psi,$$

et écrivons que la somme des ordres de cette fonction par rapport aux cycles de la courbe C′ est nulle.

1° La somme des ordres de θ par rapport aux cycles pour lesquels x' et y' sont infinis est, en appelant m' le degré de C′, le produit $-m's$; en effet, le nombre des cycles de C′ pour lesquels l'origine est à l'infini est m' et l'ordre de θ par rapport à chacun d'eux est $-s$.

2° Si φ, χ, ψ sont nuls à la fois, à chaque point (x', y') pour lequel $\varphi = \chi = \psi = 0$, correspondra un cycle; les ordres de φ, χ, ψ par rapport à ce cycle étant désignés par h, il s'introduira dans la somme que nous voulons évaluer un terme égal à Σh.

3° Enfin, si l'on considère un point d'intersection de la droite

$$ax + by + c = 0,$$

avec la courbe C, à ce point correspondra un point (x', y') donnant lieu à un cycle, par rapport auquel l'ordre de θ sera égal à un : le nombre total de ces cycles est m; ce nombre doit donc figurer dans la somme des ordres de θ, et l'on a

$$(1) \qquad -m's + \Sigma h + m = 0.$$

Considérons en second lieu la fonction

$$T = a\left(\chi\frac{d\psi}{dx'} - \psi\frac{d\chi}{dx'}\right) + b\left(\psi\frac{d\varphi}{dx'} - \varphi\frac{d\psi}{dx'}\right) + c\left(\varphi\frac{d\chi}{dx'} - \chi\frac{d\varphi}{dx'}\right),$$

dans laquelle $\frac{df}{dx'}$ désigne une dérivée totale relative à x', égale par conséquent à $\frac{\partial f}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{dy'}{dx'}$ et où a, b, c désignent trois constantes quelconques, et écrivons que la somme de ses ordres relativement aux cycles de C′ est nulle.

1° Les points x', y', situés à l'infini et qui sont au nombre

de m', donnent des cycles par rapport auxquels l'ordre de T est $-2(s-1)$, parce que le degré de $\chi\frac{d\psi}{dx'}-\psi\frac{d\chi}{dx'}$ par exemple est $2(s-1)$; ces points fourniront à la somme que nous voulons évaluer la partie $-2m'(s-1)$.

2° Les points où $dx'=0$ fournissent à la somme que nous cherchons l'élément $-n'$, égal en valeur absolue à la classe de C'.

3° Considérons maintenant les cycles dont l'origine x', y' annule le polynôme T et tout d'abord ceux pour lesquels l'origine satisfait aux équations

$$\frac{\chi\,d\psi-\psi\,d\chi}{dx'}=\frac{\psi\,d\varphi-\varphi\,d\psi}{dx'}=\frac{\varphi\,d\chi-\chi\,d\varphi}{dx'}=0.$$

Soit

$$X'-x'=t^{j'},\qquad Y'-y'=A't^{j'}+\ldots$$

l'équation de l'un de ces cycles et

$$X-x=t^{j},\qquad Y-y=At^{j}+\ldots$$

l'équation du cycle correspondant sur la courbe C; on a

$$\chi\frac{d\psi}{dx'}-\psi\frac{d\chi}{dx'}=\left(\frac{\chi\,d\psi-\psi\,d\chi}{\psi^2\,dt}\right)\psi^2:\frac{dx'}{dt}=\psi^2\frac{dY}{dt}:\frac{dx'}{dt};$$

mais φ, χ, ψ sont d'ordre h : la quantité précédente est donc d'ordre $2h+j-j'$. Les cycles considérés fournissent donc à la somme que nous voulons évaluer l'élément $\sum(2h-j'+j)$.

4° Enfin nous avons encore à considérer les cycles dont les coordonnées de l'origine, sans annuler à la fois $\frac{\chi\,d\psi-\psi\,d\chi}{dx'}$, ..., annulent cependant T. La relation $T=0$ est une relation linéaire entre les coordonnées tangentielles d'une tangente à la courbe C : elle exprime que cette tangente passe par un point fixe, ce qui détermine n points x, y et par suite n points x', y', et n cycles apportant une unité à la somme que nous voulons évaluer, n désignant la classe de C.

On a donc finalement

$$(2)\qquad -2m'(s-1)-n'+\Sigma(2h-j'+j)+n=0;$$

l'élimination de s entre (1) et (2) donne

$$(3) \qquad n - 2m - (n' - 2m') + \Sigma(j - j') = 0.$$

Maintenant je dis qu'en tout point où l'on n'aura pas

$$\frac{\chi\, d\psi - \psi\, d\chi}{dx'} = \frac{\psi\, d\varphi - \varphi\, d\psi}{dx'} = \frac{\varphi\, d\chi - \chi\, d\varphi}{dx'} = 0,$$

le cycle ayant ce point pour origine et le cycle correspondant sur la courbe C auront le même ordre.

En effet, les équations d'un cycle de C étant

$$X = x + t^j, \qquad Y = y + A t^j + \ldots,$$

les équations du cycle correspondant de C′ seront

$$X = \frac{\varphi(x' + t^j, y' + A t^j + \ldots)}{\psi(x' + t^j, y' + A t^j + \ldots)}, \qquad Y = \ldots$$

ou

$$X = x' + t^j\left(\frac{d}{dx'}\frac{\varphi}{\psi} + A\frac{d}{dy'}\frac{\varphi}{\psi}\right) + \ldots, \qquad Y = \ldots;$$

donc, si l'on n'a pas

$$\varphi\, d\psi - \psi\, d\varphi = 0, \qquad \chi\, d\psi - \psi\, d\chi = 0,$$

ce qui entraînerait $\psi\, d\varphi - \varphi\, d\psi = 0$, l'ordre j du cycle de C sera égal à j'. La même conclusion subsiste quand le point (x, y) est à l'infini.

Dans la formule (3), on peut donc supposer que le signe $\sum$ s'étend à tous les cycles des courbes C et C′; si l'on écrit cette formule (3) ainsi

$$(4) \qquad n - 2m + \sum(j - 1) = n' - 2m' + \sum(j' - 1),$$

on pourra dire que les signes $\sum$ s'appliquent à tous les cycles dont l'ordre n'est pas égal à l'unité.

Nous verrons tout à l'heure que le nombre

$$n - 2m + \sum(j - 1)$$

est pair. Appelons-le $2(p-1)$: nous aurons alors

$$n - 2m - \sum (j-1) = 2p - 2$$

ou bien

$$(5) \qquad p = \frac{n}{2} - m + 1 - \frac{1}{2}\sum (j-1);$$

ce nombre p est ce que l'on appelle le *genre* de la courbe C. On peut donc énoncer le théorème suivant, qui a été entrevu par Riemann, mais dont le véritable sens et la démonstration rigoureuse ont été donnés par M. Halphen et M. Smith.

THÉORÈME. — *Une transformation rationnelle n'altère pas le genre d'une courbe.*

Et, en particulier, une transformation quadratique (p. 69) n'altère pas le genre d'une courbe.

XV. — Limite du nombre des singularités.

Dans le cas où la courbe algébrique C n'a pas de points singuliers à tangentes confondues, la formule (5) du paragraphe précédent qui donne le genre se réduit à

$$p = \frac{n}{2} - m + 1,$$

car il n'y a pas de cycles d'ordre supérieur à un, et, en remplaçant n par sa valeur, qui alors est (p. 67)

$$n = m(m-1) - \delta = m(m-1) - \sum \frac{k(k-1)}{2},$$

k désignant l'ordre d'un point multiple, on a pour p la valeur entière

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \sum \frac{k(k-1)}{2}.$$

Je vais prouver que, dans ce cas, le genre est positif, c'est-à-dire que le nombre des intersections d'une courbe C avec

elle-même ne peut être supérieur à $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$. En effet, supposons que ce nombre puisse être égal à

$$\text{(A)} \qquad \frac{(m-1)(m-2)}{2}+1=\frac{m^2-3m+4}{2}$$

au moins. Par $\frac{m^2-3m+4}{2}$ des rencontres faisons passer une courbe C′ d'ordre $m-1$, ce qui veut dire, par exemple, que si la courbe C a un point d'ordre de multiplicité k, j'assujettirai la courbe à passer par ce point et à y avoir un point d'ordre $k-1$; cela revient à assujettir la courbe C′ à $\frac{m^2-3m+4}{2}$ conditions; en effet, assujettir la courbe C′ à avoir un point d'ordre $k-1$ en un point déterminé, c'est bien l'assujettir à $\frac{k(k-1)}{2}$ conditions. Or une courbe d'ordre $m-1$ peut être assujettie à $\frac{(m-1)(m+2)}{2}$ ou $\frac{m^2+m-2}{2}$ conditions; les conditions auxquelles elle a déjà été assujettie ne permettent plus que de lui faire remplir

$$\frac{m^2+m-2}{2}-\frac{m^2-3m+4}{2}=2m-3$$

conditions; profitons-en pour la faire passer par $2m-3$ points de la courbe C. Comptons à présent le nombre des intersections des courbes C et C′. En un point d'ordre k de C (p. 41), elles ont $k(k-1)$ points communs confondus, c'est-à-dire deux fois autant de points communs que la courbe C a d'intersections avec elle-même. Il en résulte que le nombre des intersections de C et C′ confondus sur les points singuliers est double du nombre (A), c'est-à-dire

$$m^2-3m+4.$$

Si l'on ajoute à ce nombre les $2m-3$ autres points par lesquels on a fait passer C′, on a un total de points

$$m^2-m+1=m(m-1)+1;$$

mais les courbes C et C′ sont de degrés m et $m-1$: elles ne peuvent donc se couper en plus de $m(m-1)$ points que si une partie ou la totalité de la courbe C′ se confond avec C; en d'autres termes, que si cette courbe C n'est pas une courbe proprement dite, mais bien un ensemble de courbes distinctes.

Maintenant considérons une courbe avec des singularités quelconques; au moyen d'une série de transformations quadratiques, on la changera en une courbe n'ayant plus de points singuliers à tangentes confondues. Cette suite de transformations n'aura pas altéré le genre; donc :

1° Comme après la transformation le genre se trouve être un nombre entier positif, on en conclut que :

Le genre d'une courbe est toujours un nombre entier et positif (pour une courbe indécomposable).

2° Si, dans la formule (5) du paragraphe précédent qui donne le genre p, on remplace n par sa valeur (p. 67), on trouve

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \sum \frac{k(k-1)}{2} - s - \sum \frac{(j-1)}{2},$$

et l'on voit que $s + \frac{1}{2}\sum(j-1)$ est un entier.

Si une courbe peut se décomposer en d'autres d'ordre moindre, son genre peut devenir négatif; par exemple, un système de trois droites est une courbe de troisième degré de genre $1-3=-2$. En général :

Le genre d'une courbe C *formée de plusieurs autres* $C_1, C_2, \ldots, C_k$ *de genres* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *en nombre* k *est égal à*

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k - k + 1.$$

En effet, le genre P de la courbe C est, en appelant m son degré, δ la somme de ses rencontres avec elle-même, j l'ordre d'un de ses cycles d'ordre supérieur à un,

$$(1) \qquad P = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \delta - \sum(j-1);$$

le genre p_i de la courbe C_i est, en le supposant de degré m_i,

$$p_i = \frac{(m_i - 1)(m_i - 2)}{2} - \delta_i - \sum (j_i - 1),$$

δ_i et j_i désignant pour cette courbe les quantités analogues à δ et j. En général, les courbes C_i se coupent en

$$m_1 m_2 + m_1 m_3 + \ldots + m_{k-1} m_k = \sum m_i m_h$$

points que l'on peut regarder comme des points doubles de C; on a donc

$$\delta + \sum (j - 1) = \sum \delta_i + \sum (j_i - 1) + \sum m_i m_h$$

et, par suite,

$$\sum p_i = \sum \frac{(m_i - 1)(m_i - 2)}{2} - \delta - \sum (j - 1) + \sum m_i m_h;$$

la formule (1) donne alors

$$P = \frac{\left(\sum m_i - 1\right)\left(\sum m_i - 2\right)}{2} - \sum \frac{(m_i - 1)(m_i - 2)}{2} - \sum m_i m_h + \sum p_i$$

où

$$P = \sum p - k + 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

XVI. — Réduction des fonctions algébriques.

Nous allons voir que toutes les fonctions algébriques de même genre sont réductibles à des types simples au moyen de transformations rationnelles.

Au moyen d'une première transformation, on peut ramener une courbe algébrique à ne plus avoir de points singuliers à tangentes confondues (p. 73); soit donc

(1) $$f(x, y) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x, y, z) = 0$$

une courbe algébrique d'ordre m à tangentes séparées, appliquons-lui la transformation

$$(2) \qquad \frac{x'}{\varphi(x, y, z)} = \frac{y'}{\chi(x, y, z)} = \frac{z'}{\psi(x, y, z)},$$

dans laquelle nous supposerons les polynômes φ, χ, ψ de degrés s. Elle se transformera en une autre courbe

$$(3) \qquad f'(x', y', z') = 0,$$

dont nous désignerons le degré par m'. Commençons par évaluer m'. Désignons par d_1 le nombre de points simples de $f = 0$ par lesquels passent les courbes $\varphi = 0$, $\chi = 0$, $\psi = 0$; par d_2 le nombre de points doubles de $f = 0$ par lesquels passent les mêmes courbes, etc. Coupons la courbe (3) par la droite

$$ax' + by' + cz' = 0,$$

le nombre des intersections m' sera celui des solutions des équations

$$f = 0, \qquad a\varphi + b\chi + c\psi = 0,$$

qui est ms; mais, de ce nombre, il faut défalquer le nombre des intersections de $\varphi = 0$, $\chi = 0$, $\psi = 0$, $f = 0$, s'il y en a, parce que ces points fixes ne sauraient correspondre à des points x', y', z': le nombre de ces points est

$$d_1 + 2d_2 + 3d_3 + \ldots;$$

on a donc

$$(4) \qquad m' = ms - d_1 - 2d_2 - 3d_3 - \ldots;$$

le degré m' pourra donc par la transformation (2) être rendu d'autant plus petit que $d_1 + 2d_2 + \ldots$ sera plus grand, et il y aura lieu, dans le but, de simplifier l'équation $f' = 0$, de faire passer les courbes $\varphi = 0$, $\chi = 0$, $\psi = 0$ par le plus grand nombre possible de points de $f = 0$.

Ces courbes étant d'ordre s contiendront dans leur équation $\frac{s(s+3)}{2}$ paramètres variables, et l'on pourrait les faire

passer par autant de points de $f=0$; mais il faut que ces courbes soient variables, pour déterminer par leurs intersections un point variable x', y', z' avec x, y, z : ceci exige qu'elles n'aient pas toutes les trois des équations de la forme $u+\lambda v$, u et v désignant des polynômes donnés et λ un paramètre indépendant de x', y', z'. Ainsi l'on ne pourra disposer que de $\frac{s(s+3)}{2}-2$ des paramètres contenus dans φ, χ, ψ, et l'on pourra seulement faire passer les courbes $\varphi=0$, $\chi=0$, $\psi=0$ par $\frac{s(s+3)}{2}-2$ points de $f=0$. Appelons p le genre de $f=0$ et $f'=0$. Soient d'_2, d'_3, ... les nombres de points doubles, triples, etc., de $f'=0$.

Faisons passer les courbes $\varphi=0$, $\chi=0$, $\psi=0$: 1° par d_1 points simples de $f=0$; 2° par les d_2 points doubles de la même courbe; 3° par les d_3 points triples de la même courbe, mais en les assujettissant à avoir en ces points des points doubles; 4° par les d_4 points quadruples de $f=0$, en les assujettissant à y avoir des points triples, etc. Alors on aura, au lieu de la formule (4),

$$m'=ms-d_1-2d_2-6d_3-\ldots$$

ou, si l'on veut,

$$(5)\qquad m'=ms-(m-1)(m-2)+2p-d_1,$$

à cause de l'égalité

$$p=\frac{(m-1)(m-2)}{2}-d_2-3d_3-\ldots;$$

on devra avoir ensuite, d'après ce que nous avons dit,

$$\frac{s(s+3)}{2}-2\geqq d_2+3d_3+6d_4+\ldots$$

ou bien

$$\frac{s(s+3)}{2}>1+d_2+3d_3+\ldots$$

ou enfin

$$(6)\qquad \frac{s(s+3)}{2}>1+\frac{(m-1)(m-2)}{2}-p.$$

Examinons maintenant successivement les divers cas qui peuvent se présenter.

1° *Courbes de genre* 0, $p=0$. — On satisfait à la formule (6) qui devient

$$\frac{s(s+3)}{2} > 1 + \frac{(m-1)(m-2)}{2};$$

en prenant $s = m - 2$, la formule (5) donne

$$m' = m(m-2) - (m-1)(m-2) - d_1$$

ou

(A) $$m' = m - 2 - d_1.$$

La différence entre $\frac{s(s+3)}{2} - 2$ et le nombre de conditions $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ imposés aux courbes $\varphi = 0$, $\chi = 0$, $\psi = 0$ est

$$\frac{(m-2)(m+1)}{2} - 2 - \frac{(m-1)(m-2)}{2} = m - 4;$$

on peut donc faire dans (A) $d_1 = m - 4$, et l'on a alors $m' = 2$; donc :

Toute courbe de genre zéro peut être transformée en une autre du second degré.

Celle-ci à son tour pourra, au moyen d'une transformation quadratique, être transformée en une ligne droite; ceci revient à dire que :

Théorème I. — *Les fonctions algébriques de genre zéro peuvent, au moyen de transformations rationnelles, être changées en fonctions du premier degré.*

2° *Courbes du genre un,* $p = 1$. — On satisfait à la formule (6) en prenant

$$\frac{s(s+3)}{2} > \frac{(m-1)(m-2)}{2},$$

c'est-à-dire $s=m-2$; la formule (5) donne

$$m'=m(m-2)-(m-1)(m-2)+2-d_1$$

ou

$$m'=m-d_1; \tag{B}$$

la différence entre $\frac{s(s+3)}{2}-2$ et le nombre de conditions $\frac{(m-1)(m-2)}{2}-1$ imposées aux courbes $\varphi=0$, $\chi=0$, $\psi=0$ est

$$\frac{(m-2)(m+1)}{2}-2-\frac{(m-1)(m-2)}{2}+1=m-3;$$

on peut alors prendre $d_1=m-3$, et l'on a, au moyen de la formule (B), $m'=3$. Comme $p=1$, la formule

$$p=\frac{(m'-1)(m'-2)}{2}-d_2-3d_3-\ldots$$

donne

$$1=1-d_2 \qquad \text{ou} \qquad d_2=0;$$

donc :

Théorème II. — *Les fonctions algébriques de genre un peuvent, au moyen de transformations rationnelles, être ramenées à des fonctions du troisième ordre de genre un.*

3° *Courbes de genre* $p\geqq 2$. — Il faut toujours satisfaire à la formule (6), et l'on y satisfera en prenant $s=m-2$. La formule (5) donne

$$m'=(m-2)m-d_1-(m-1)(m-2)+p$$

ou

$$m'=m-2-d_1+p; \tag{C}$$

le nombre de paramètres dont on peut disposer pour déterminer les courbes $\varphi=0$, $\chi=0$, $\psi=0$ est

$$\frac{(m-2)(m+1)}{2}-2-\frac{(m-1)(m-2)}{2}+p=m-4+p:$$

on pourra donc prendre $d_1 = m - 3 + p$; alors la formule (C) donnera

$$m' = p + 2;$$

ensuite la formule

$$p = \frac{(m'-1)(m'-2)}{2} - d_2 - 3d_3 - \ldots$$

donnera

$$d_2 + 3d_3 + \ldots = \frac{p(p-1)}{2}.$$

Il résulte de là que :

Théorème III. — *Au moyen de transformations rationnelles, on peut toujours changer une courbe de genre p en une autre de degré p + 2, avec des singularités équivalentes à* $\frac{p(p-1)}{2}$ *points doubles.* C'est ce que nous appellerons une courbe *normale.*

En d'autres termes :

Une fonction algébrique de genre p peut être transformée en une autre d'ordre p + 2, avec des singularités équivalentes à $\frac{p(p-1)}{2}$ *points doubles, au moyen de transformations rationnelles.*

Tels sont les résultats entrevus par Riemann, et rigoureusement établis dans ces derniers temps, grâce au beau théorème de M. Nöther. Le théorème de M. Nöther est en réalité le suivant :

Au moyen de substitutions rationnelles, on peut toujours ramener une courbe à n'avoir d'autres points singuliers que des points doubles à tangentes séparées.

Mais il n'existe pas, à notre connaissance, de démonstrations tout à fait rigoureuses de cette proposition générale.

XVII. — Formes les plus simples des fonctions de genre zéro, un et deux.

Une fonction de genre zéro peut être ramenée à satisfaire à une équation linéaire, et par une transformation homographique toute fonction linéaire peut être ramenée à la forme $y = x$: telle est la forme normale d'une fonction de genre o; en appelant alors η une fonction quelconque de genre o et ξ sa variable, ξ et η seront des fonctions rationnelles de x et $y = x$, c'est-à-dire de x. Ainsi se trouve démontré ce théorème que, *si une courbe a son maximum de points doubles, ses coordonnées sont fonctions rationnelles d'un même paramètre x.*

Une fonction η de genre un et sa variable ξ sont fonctions rationnelles d'une fonction du troisième ordre et de sa variable sans point double. Or la fonction du troisième ordre sans point double peut, comme l'on sait (p. 62), au moyen d'une transformation homographique, être ramenée à satisfaire à l'équation

$$y^2 = x(x-\alpha)(x-\beta) \qquad \text{ou} \qquad y = \sqrt{x(x-\alpha)(x-\beta)},$$

α et β désignant des constantes; par suite, ξ et η, pour une fonction du premier genre, seront de la forme

$$\xi = f(x, \mathrm{R}), \qquad \eta = \mathrm{F}(x, \mathrm{R}),$$

f et F désignant des fonctions rationnelles de x et du radical $\mathrm{R} = \sqrt{x(x-\alpha)(x-\beta)}$.

Si l'on pose $x = t^2$, on trouve

$$\xi = f_1\left[t, \sqrt{(t^2-\alpha)(t^2-\beta)}\right],$$
$$\eta = \mathrm{F}_1\left[t, \sqrt{(t^2-\alpha)(t^2-\beta)}\right]$$

f_1 et F_2 désignant des fonctions rationnelles. Nous verrons que le radical, sans cesser d'être du second degré, peut affecter les formes les plus diverses. Pour le moment il est établi que :

Lorsqu'une courbe algébrique a son maximum de points

doubles moins un, ou qu'elle est de genre un, ses coordonnées peuvent être exprimées en fonction rationnelle d'un même paramètre t et d'un radical de la forme

$$\sqrt{At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E},$$

A, B, C, D, E *désignant des constantes.*

Considérons encore une fonction, ou plutôt une courbe de genre deux : elle est réductible à une courbe du quatrième degré avec un point double. Prenons ce point double pour origine des coordonnées, posons $y = tx$: l'équation de la courbe du quatrième degré se réduira à une équation du quatrième degré en x ayant deux racines nulles, et du quatrième degré en t. On pourra la diviser par x^2, et x s'en déduira sous la forme

$$x = \frac{A + \sqrt{T}}{B} \quad \text{d'où} \quad y = t\,\frac{A + \sqrt{T}}{B}$$

T désignant une fonction de T du sixième degré et A, B des fonctions rationnelles. *L'x et l'y d'une courbe algébrique de genre deux seront donc des fonctions rationnelles d'un paramètre t et d'un radical carré recouvrant un polynôme de sixième degré en t.*

Les coordonnées d'une courbe de genre p, quand $p \geqq 3$, ne peuvent plus en général s'exprimer en fonction d'un même paramètre sous forme algébrique *explicite*.

Ces exemples montrent toute l'importance de la notion du genre, qui paraît aussi apte à classer les courbes algébriques que la notion de l'ordre. Il suffit, en effet, d'étudier les propriétés des courbes normales pour en déduire, par une méthode analogue à la méthode des projections, les propriétés les plus intéressantes des courbes du même genre.

XVIII. — Exemples de courbes de même genre.

Une courbe et sa transformée par polaires réciproques, ou même une quelconque de ses corrélatives, ont le même genre.

En effet, la polaire réciproque de la courbe

$$f(x, y, z) = 0$$

s'obtient au moyen de la transformation

$$\xi : \frac{\partial f}{\partial x} = \eta : \frac{\partial f}{\partial y} = \zeta : \frac{\partial f}{\partial z},$$

qui est rationnelle. Cette polaire réciproque est prise par rapport à la conique $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; mais toutes les autres courbes corrélatives de $f = 0$ sont des transformées homographiques de celle-ci ; le théorème est donc démontré.

Corollaire. — Nous verrons qu'une transformation par rayons vecteurs réciproques est un cas particulier de la transformation qnadratique ; elle n'altère pas le genre ; si l'on se rappelle alors que la transformée par rayons vecteurs réciproques de la podaire d'une courbe est la polaire réciproque de cette courbe par rapport à un cercle (p. 70, t. II), on voit qu'une courbe et sa podaire sont de même genre.

Une courbe et sa développée sont de même genre.

En effet, pour avoir la développée de la courbe $f(x, y) = 0$, il faut chercher l'enveloppe de ses normales, qui sont représentées par l'équation

$$\frac{X - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial f}{\partial y}};$$

à la suite de ces rapports on peut écrire $= \dfrac{x^2 + y^2 - Xx - Yy}{\frac{\partial f}{\partial z}}$,

on aura alors deux équations qui donneront X et Y coordonnées d'un point de la développée en fonction rationnelle de x et y. Donc, etc.

Quand une courbe est unicursale, elle est carrable en termes finis, puisque ses coordonnées x, y sont fonctions rationnelles d'un même paramètre, et alors $\int y\,dx$, son aire, est une inté-

grale de fonction rationnelle. Toutes ses développées successives sont de même genre zéro, et par suite elles sont également carrables en termes finis. Il en est de même de ses transformées par rayons vecteurs réciproques, par polaires réciproques, et de ses podaires.

De ce que la polaire réciproque d'une courbe et cette courbe ont le même genre, il résulte que le genre d'une courbe peut s'exprimer au moyen des singularités de cette polaire, qui sont relatives aux tangentes de la courbe elle-même, mais cette formule ne nous sera pas utile.

XIX. — Des transformations birationnelles.

Une transformation est *birationnelle* quand, les anciennes variables étant des fonctions rationnelles des nouvelles variables, celles-ci, à leur tour, sont encore fonctions rationnelles des anciennes.

Soit

$$(1)\qquad \frac{x'}{U} = \frac{y'}{V} = \frac{z'}{W}$$

une transformation qui doit être birationnelle; U, V, W seront trois polynômes entiers en x, y, z, homogènes et de degré m. Pour que cette transformation soit birationnelle, il faut que l'on puisse en tirer x, y, z en fonctions rationnelles de x', y', z'.

Or à chaque point x', y', z' correspondront m^2 points, intersections des courbes

$$(2)\qquad Vz' - Wy' = 0, \qquad Wx' - Uz' = 0.$$

Supposons que les courbes $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ se coupent en p points dits *fondamentaux;* les courbes (1) ou (2) passeront par ces p points fixes et, par suite, $m^2 - p$ seulement de leurs autres intersections seront fonctions de x', y', z'; si l'on avait $p = m^2 - 1$, un seul point d'intersection des courbes (1) serait fonction des x', y', z' et serait fourni par des formules rationnelles en x', y', z'.

Pour qu'il existe des formules de transformation birationnelles de degré m, il est donc nécessaire que les courbes $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ *d'ordre m, aient* $m^2 - 1$ *points communs.*

Mais cette condition est loin d'être suffisante; en effet, si l'on prend $W = U + \lambda V$, les courbes U, V, $W = 0$ auront m^2 points communs et les courbes (2) auront les mêmes points communs qui seront fixes; aux points x', y', z' correspondraient alors des points fixes : nous n'aurions pas ainsi des formules de transformation proprement dites.

Pour que nos formules de transformation puissent être regardées comme telles et soient de quelque utilité, il faut que, étant donné le point variable (x', y', z'), on en déduise pour (x, y, z) un autre point variable. Nous nous imposerons même cette condition que (x, y, z) varie, de quelque façon que l'on fasse varier (x', y', z').

Supposons que l'on fasse décrire au point x', y', z' une droite $ax' + by' + cz' = 0$, le point x, y, z décrira une courbe $aU + bV + cW = 0$; nous nous imposerons cette condition que la courbe $aU + bV + cW = 0$ renferme deux paramètres arbitraires comme la droite qui lui correspond, ce qui n'aurait pas lieu si les courbes $U = 0$, $V = 0$ et $W = 0$ faisaient partie d'un même faisceau.

Mais il se présente ici une difficulté; les courbes $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ devant avoir $m^2 - 1$ points communs, il semble précisément qu'elles doivent faire partie du même faisceau; car une courbe d'ordre m est déterminée par $\frac{m(m+3)}{2}$ points, et, si $m > 2$, on a $\frac{m(m+3)}{2} < m^2 - 1$. Mais cette difficulté disparaît quand on s'arrange de manière que les points communs aux courbes considérées soient des points multiples. Nous allons, en effet, prouver que :

Si les courbes $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ *ont en commun* α_1 *points ordinaires,* α_2 *points doubles, ...,* α_k *points d'ordre*

de multiplicité k, on pourra toujours choisir ces nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, *de telle sorte que les courbes en question aient* $m^2 - 1$ *intersections communes et que la courbe*

$$aU + bV + cW = 0$$

renferme encore deux paramètres arbitraires, c'est-à-dire qu'on puisse encore la faire passer par deux points arbitrairement choisis.

Deux points d'ordre k étant confondus, les courbes auxquelles ils appartiennent ont en ces points k^2 points communs; on devra donc avoir

$$(1) \qquad \alpha_1 + 4\alpha_2 + \ldots + k^2\alpha_k = m^2 - 1.$$

D'un autre côté, la donnée d'un point d'ordre k impliquant $\frac{k(k+1)}{2}$ conditions, il faudra qu'en obligeant la courbe $aU + bV + cW$ à avoir α_1 points simples, α_2 points doubles, etc., on ne lui impose que $\frac{m(m+3)}{2} - 2$ conditions; donc

$$(2) \qquad \alpha_1 + 3\alpha_2 + \ldots + \frac{k(k+1)}{2}\alpha_k = \frac{m(m+3)}{2} - 2.$$

Retranchons (2) de (1) : nous aurons

$$(3) \qquad \alpha_2 + \ldots \frac{k(k-1)}{2}\alpha_k = \frac{1}{2}(m-1)(m-2).$$

Or, le point d'ordre k pouvant être considéré comme la réunion de $\frac{k(k-1)}{2}$ points doubles, cette dernière formule prouve que les courbes $aU + bV + cW = 0$ ont leur maximum $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ de points doubles; elles sont donc unicursales, ce que l'on vérifie immédiatement en observant que ces courbes correspondent à des droites et qu'à des courbes unicursales doivent correspondre des courbes unicursales.

Théorème. — *Si l'on considère les trois points multiples des courbes* $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ *qui sont de l'ordre le plus élevé, la somme de leurs ordres est supérieure à* m.

En effet de (1) et (3) on tire par soustraction

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + k\alpha_k = 3m - 3; \tag{4}$$

soient r, s, t les ordres des points multiples de l'ordre le plus élevé, (1) et (4) pourront s'écrire

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 4\alpha_2 + \ldots + t^2\alpha_t &= m^2 - 1 - r^2 - s^2, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + t\ \alpha_t &= 3m - 3 - r - s; \end{aligned}$$

multiplions la seconde formule par t et retranchons-en la première, le premier membre de l'équation résultante sera positif et l'on aura, par suite,

$$t(3m - 3 - r - s) - m^2 + 1 + r^2 + s^2 > 0$$

ou bien

$$m^2 - 3mt - r^2 - s^2 - 1 + t(3 + r + s) < 0; \tag{4}$$

or, si l'on égale le premier membre à zéro, on trouve

$$m = \frac{3t}{2} \pm \sqrt{9\frac{t^2}{4} + r^2 + s^2 + 1 - 3t - rt - st}. \tag{5}$$

La quantité sous le radical peut s'écrire

$$\left(r + s - \frac{t}{2}\right)^2 + 2t^2 - 2rs - 3t + 1.$$

Or r et s sont au moins égaux à t; donc cette quantité est moindre que $\left(r + s - \frac{t}{2}\right)^2$; par suite, les valeurs (5) de m sont au plus égales à $r + s - \frac{t}{2} + \frac{3t}{2}$ ou à $r + s + t$; donc enfin l'inégalité (4) ne saurait avoir lieu que si

$$m < r + s + t. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce théorème est important pour ce qui va suivre.

XX. — Réduction des transformations birationnelles à des transformations quadratiques.

Considérons une transformation birationnelle quelconque

$$\frac{x'}{U} = \frac{y'}{V} = \frac{z'}{W},$$

U, V, W ayant la même signification qu'au paragraphe précédent; prenons pour sommets du triangle de référence les trois points singuliers des courbes U, V, W $= 0$ dont l'ordre est le plus élevé, puis effectuons la transformation quadratique sur une des courbes $a\mathrm{U} + b\mathrm{V} + c\mathrm{W}$. En appelant r, s, t l'ordre des points singuliers en question, une courbe d'ordre m se transformera en une autre d'ordre $2m - r - s - t$ moindre que m, en vertu du théorème précédent, mais elle présentera aux points fondamentaux des singularités d'ordre $m - s - t$, $m - t - r$, $m - r - s$ ou $m - (r + s + t) + r$, ..., c'est-à-dire d'ordres au moins (p. 94) égaux à r, s, t, qui seront encore des points de l'ordre le plus élevé, puisque la transformation quadratique ne modifie que les singularités des points principaux. Une seconde transformation quadratique abaissera encore l'ordre de la courbe considérée, et ainsi de suite. On finira par tomber sur une transformée rectiligne. Ainsi :

Théorème. — *Toute transformation birationnelle se réduit à une série de transformations quadratiques.*

D'ailleurs, une suite de transformations quadratiques constitue évidemment une transformation birationnelle.

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DES DOCTRINES EXPOSÉES AU CHAPITRE PRÉCÉDENT.

I. — Courbes unicursales ou de genre zéro.

Les courbes de genre zéro ont reçu le nom de *courbes unicursales;* leurs propriétés les plus intéressantes résultent de ce que l'on peut exprimer leurs coordonnées en fonction rationnelle d'un même paramètre.

Commençons par démontrer que, *si une courbe peut être représentée par des équations de la forme*

$$x = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}, \qquad y = \frac{\chi(t)}{\psi(t)}, \tag{1}$$

φ, χ, ψ *désignant des fonctions entières que nous supposerons du degré s, cette courbe est de genre zéro.*

1° La courbe représentée par les équations (1) est d'ordre s; en effet, elle coupe en s points la droite

$$ax + by + c = 0.$$

Les points d'intersection s'obtenant en éliminant x et y entre cette équation et (1), ce qui donne l'équation du degré s

$$a\varphi + b\chi + c\psi = 0;$$

les s valeurs de t qu'on tire de là, portées dans (1), feront connaître les coordonnées des s points d'intersection de la droite et de la courbe.

2° Cherchons maintenant l'équation tangentielle de la courbe; il faut exprimer que la droite

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 0,$$

lui est tangente ou, ce qui revient au même, que l'équation

$$\xi\varphi + \eta\chi + \zeta\psi = 0$$

a une racine double en t. Cette équation différentiée donne

$$\xi\varphi' + \eta\chi' + \zeta\psi' = 0;$$

de cette équation et de la précédente, on tire

$$\frac{\xi}{\chi\psi' - \psi\chi'} = \frac{\eta}{\psi\varphi' - \varphi\psi'} = \frac{\zeta}{\varphi\chi' - \chi\varphi'}.$$

Les coordonnées tangentielles $\xi : \eta : \zeta$ pourront donc s'exprimer en fonction rationnelle de t; le degré de la polaire réciproque de la courbe proposée sera, d'après ce que l'on a vu tout à l'heure, le degré des polynômes $\chi\psi' - \psi\chi'$, ..., c'est-à-dire $2s - 2$; en effet, ce degré est en apparence $2s - 1$, mais il est facile de voir que les termes de degré $2s - 1$ sont identiquement nuls. Ainsi la classe n de notre courbe est $2s - 2$; en supposant que la courbe n'ait que des points multiples à tangentes séparées, on a, en appelant δ le nombre des rencontres de la courbe avec elle-même,

$$2s - 2 = s(s-1) - 2\delta, \qquad \delta = \frac{(s-1)(s-2)}{2};$$

la courbe est donc de genre 0.

3° Cherchons encore ses points d'inflexion; ce sont ceux où la droite

$$ax + by + cz = 0$$

rencontre la courbe en trois points confondus, ce sont ceux où

$$a\varphi + b\chi + c\psi = 0$$

a une racine triple; en rendant cette équation homogène par l'introduction d'une variable u, il faudra qu'en un point d'inflexion on ait

$$a\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + b\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} + c\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0,$$

$$a\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial u} + b\frac{\partial^2\chi}{\partial t\,\partial u} + c\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial u} = 0,$$

$$a\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + b\frac{\partial^2\chi}{\partial u^2} + c\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\,\partial u} & \frac{\partial^2 \chi}{\partial t\,\partial u} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial t\,\partial u} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation de degré $3(s-2)$ détermine les points d'inflexion dont le nombre est $3(s-2)$, ce qui permet aussi de calculer le nombre des points doubles et d'en conclure que le genre de la courbe est zéro.

Si la courbe avait des points multiples à tangentes confondues, on la soumettrait à une transformation rationnelle qui séparerait les tangentes; son genre deviendrait alors zéro, car ses coordonnées seraient toujours des fonctions rationnelles de t : donc, etc. C. Q. F. D.

II. — Courbes unicursales du second et du troisième ordre.

Toutes les courbes du second ordre sont unicursales ou de genre zéro; pour exprimer les coordonnées d'une conique en fonction d'un même paramètre, il suffit de désigner par a, b les coordonnées d'un point de la courbe; le coefficient angulaire t de la corde qui va du point (a, b) au point (x, y) est $t = \frac{y-b}{x-a}$; si, dans l'équation de la conique, on fait $y = b + (x-a)t$, le facteur $x - a$ peut être supprimé et l'on a une équation du premier degré en x, qui le fait évaluer en fonction rationnelle de t; y est alors aussi fonction rationnelle de t, puisqu'il est égal à $b + t(x-a)$.

Les courbes unicursales du troisième degré ont un point double; on peut ramener leurs équations, au moyen de transformations homographiques, à l'une des formes

$$y^2 = x^3 - \alpha x^2, \qquad y^2 = x^3,$$

suivant qu'elles ont un point double ordinaire ou un rebroussement.

On peut donner à l'équation des courbes du troisième degré unicursales une forme remarquable : une telle courbe peut être représentée par les équations

$$x = \alpha\, t^3 + \beta\, t^2 + \gamma\, t + \delta,$$
$$y = \alpha' t^3 + \beta' t^2 + \gamma' t + \delta',$$
$$z = \alpha'' t^3 + \beta'' t^2 + \gamma'' t + \delta''.$$

Soient L, M, N trois indéterminées; si l'on exprime que $Lx + My + Nz$ est un cube parfait, on trouve trois systèmes de valeurs des rapports $L : M : N$; on a donc trois équations de la forme

$$L\, x + M\, y + N\, z = T^3,$$
$$L' x + M' y + N' z = T'^3,$$
$$L'' x + M'' y + N'' z = T''^3,$$

T^3, T'^3, T''^3 désignant trois fonctions entières de t qui sont des cubes parfaits; une transformation homographique remplacera ces équations par les suivantes

$$X^{\frac{1}{3}} = T, \qquad Y^{\frac{1}{3}} = T', \qquad Z^{\frac{1}{3}} = T'',$$

et l'élimination de t conduira à la forme que nous voulions obtenir

$$AX^{\frac{1}{3}} + BY^{\frac{1}{3}} + CZ^{\frac{1}{3}} = 0,$$

A, B, C désignant des constantes.

III. — Courbes unicursales du quatrième ordre.

Les courbes unicursales du quatrième ordre étant de genre zéro doivent avoir $\frac{3.2}{1.2} = 3$ points doubles.

Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation d'une conique quelconque rapportée à un triangle de référence. Soient u, v, w trois polynômes quelconques du second degré, tels que les coniques $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ aient trois points communs, je dis que

$$f(u, v, w) = 0$$

sera l'équation générale des courbes unicursales du quatrième

degré, passant par les trois points communs à $u=0$, $v=0$, $w=0$, et ayant ces points pour points doubles. En effet :

1° Les points par lesquels passent les trois coniques sont bien des points doubles, car on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x};$$

le second membre est évidemment nul pour $u=0$, $v=0$, $w=0$; il en sera donc de même de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ et les points où l'on aura $u=0$, $v=0$, $w=0$ seront des points doubles.

2° L'équation $f(u, v, w)=0$ contient cinq paramètres arbitraires, c'est-à-dire un nombre de paramètres égal à celui d'une courbe du quatrième degré dont on a donné trois points doubles, car une courbe du quatrième degré dépend de $\frac{4,7}{2}=14$ paramètres : la donnée de trois points doubles équivaut à celle de neuf paramètres; lorsque ces points sont donnés, il ne reste plus que $14-9=5$ paramètres dans l'équation.

Prenons, comme il a été dit, pour triangle de référence le triangle dont les sommets sont les points doubles de la courbe unicursale du quatrième degré; les coniques $u=0$, $v=0$, $w=0$ devront être circonscrites au triangle de référence, et auront des équations de la forme

$$\lambda yz+\mu xz+\nu xy=0.$$

Parmi ces coniques se trouvent les systèmes de deux droites

$$yz=0,\qquad xz=0,\qquad xy=0,$$

de sorte que l'équation des courbes unicursales du quatrième ordre pourra se mettre sous la forme

$$f(yz, xz, xy)=0;$$

on obtient donc les courbes unicursales du quatrième ordre en effectuant la transformation quadratique

$$\text{(1)}\qquad \frac{x'}{yz}=\frac{y'}{zx}=\frac{z'}{xy}$$

sur l'équation générale des coniques

$$f(x', y', z') = 0.$$

Les propriétés des coniques feront donc connaître celles des courbes unicursales du quatrième ordre.

En particulier, on sait que, quand une conique coupe les trois côtés d'un triangle, les droites qui joignent les sommets à ces points d'intersection sont tangentes à une même conique ; on en déduit que :

Les six tangentes aux nœuds de la courbe unicursale du quatrième ordre sont tangentes à une même conique.

Car les droites joignant les sommets du triangle de référence aux points d'intersection de la conique qui, transformée par la substitution (1), fournit la courbe du quatrième degré sont à elles-mêmes leurs propres transformées et deviennent les tangentes aux nœuds. Pour le prouver, considérons l'équation

$$f(yz, zx, xy) = Ay^2z^2 + A'z^2x^2 + A''x^2y^2 \\ + 2Bx^2yz + 2B'y^2xz + 2B''z^2xy.$$

L'équation des tangentes en $x = 0$, $y = 0$ sera $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ ou

$$Ay^2 + A'x^2 + 2B''xy = 0;$$

c'est l'équation du faisceau des droites issues du point $x = 0$, $y = 0$ et aboutissant aux intersections de la conique

$$f(x, y, z) = 0$$

avec la droite $z = 0$. Donc, etc. C. Q. F. D.

On peut classer les courbes du quatrième ordre unicursales d'après la manière dont les coniques desquelles elles sont les transformées coupent le triangle de référence, ou, si l'on veut, le triangle des trois nœuds.

En général, on appelle les courbes du quatrième degré des *quartiques*, et les courbes du quatrième degré unicursales ayant trois nœuds sont désignées sous le nom de *quartiques*

trinodales. Lorsque les trois points d'intersection de la conique génératrice avec le triangle de référence sont réels, les trois nœuds de la quartique trinodale ont des tangentes réelles; si un côté du triangle de référence coupe la conique en deux points imaginaires, les tangentes à la quartique au sommet opposé sont imaginaires : ces points sont alors des points isolés.

Un cas intéressant est celui où la conique touche un côté du triangle de référence; le sommet correspondant est alors pour la quartique un point de rebroussement. Lorsque la conique génératrice est inscrite dans le triangle de référence, la quartique est dite *tricuspidale,* elle a alors trois rebroussements; *les tangentes aux rebroussements se coupent alors évidemment en un même point.*

L'équation générale des quartiques tricuspidales se déduit facilement de la conique génératrice : cette équation est

$$\sqrt{\frac{A}{x}}+\sqrt{\frac{B}{y}}+\sqrt{\frac{C}{z}}=0.$$

IV. — Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques.

La transformation par rayons vecteurs réciproques, dont nous avons déjà eu l'occasion de parler, est une transformation quadratique. En effet, en appelant r et r' les rayons vecteurs de deux courbes transformées l'une de l'autre par rayons vecteurs réciproques, en prenant le pôle pour origine des coordonnées, on a

$$rr' = k^2$$

et, en appelant x, y et $x'y'$ les coordonnées des points dont r et r' sont les rayons vecteurs,

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{r}{r'}=\frac{k^2}{r'^2},$$

d'où l'on tire

$$(1)\qquad x=\frac{k^2x'}{x'^2+y'^2},\qquad y=\frac{k^2y'}{x'^2+y'^2};$$

on a d'ailleurs

$$x' = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2}, \qquad y' = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Les points fondamentaux sont les points circulaires de l'infini et le pôle de la transformation.

Étudions l'influence d'une transformation par rayons vecteurs réciproques sur le degré d'une courbe. Soit

$$(2) \qquad f_m(x, y) + f_{m-1}(x, y) + \ldots + f_0 = 0$$

l'équation d'une courbe de degré m, $f_i(x, y)$ désignant en général un polynôme homogène de degré i. Si nous effectuons la transformation (1) en effaçant les accents devenus inutiles, nous obtenons sa transformée par rayons vecteurs réciproques

$$(3) \qquad k^{2m} f_m(x, y) + r^2 k^{2m-2} f_{m-1}(x, y) + \ldots + r^{2m} f_0 = 0,$$

r^2 désignant, pour abréger, $x^2 + y^2$. Cette équation sera en général de degré $2m$. Ainsi, en général :

Une transformation par rayons vecteurs réciproques double le degré d'une courbe.

Toutefois, supposons que la courbe ait pour points multiples le pôle et les points circulaires de l'infini (points fondamentaux). Soient q l'ordre de multiplicité de l'origine, p l'ordre de multiplicité de chaque point circulaire de l'infini. Le dernier terme de l'équation (3) sera $r^{2m-2q} k^{2q} f_q$ et l'équation en question ne sera plus que de degré $2m - 2q + q$ ou $2m - q$; de plus r^{2p} sera en facteur partout, en sorte que, si on le supprime et si l'on désigne par m' le degré de la transformée, on aura

$$m' = 2m - 2p - q;$$

en appelant p' le nombre de fois que la transformée passe par chaque point circulaire de l'infini, et q' le nombre de fois qu'elle passe par le pôle, on a en outre

$$p' = m - 2q, \qquad q' = m - p - q;$$

on a de même

$$m = 2m' - 2q' - p', \qquad p = m' - 2q', \qquad q = m' - p' - q'.$$

Au surplus, ces dernières équations sont des conséquences de celles qui précèdent.

Comme l'on voit, si $m = 2p + q$, le degré m' de la transformée pourra devenir égal à celui de la proposée m. C'est ce qui a lieu dans le cercle $m = 2$, $p = 1$, $q = 0$, quand il ne passe pas par l'origine.

V. — Des courbes anallagmatiques.

M. Moutard a étudié les courbes qui sont à elles-mêmes leurs propres transformées par rayons vecteurs réciproques sous le nom d'*anallagmatiques;* elles jouissent de propriétés curieuses, grâce à la présence de leurs points singuliers qui coïncident avec les points circulaires de l'infini.

Théorème de M. Moutard. — *Toute anallagmatique est l'enveloppe d'une série de cercles orthogonaux à un cercle fixe appelé* directeur, *et dont les centres se meuvent sur une courbe appelée* déférente.

En effet, si l'on considère le quadrilatère qui a pour sommets deux points infiniment voisins de l'anallagmatique et leurs correspondants, ce quadrilatère sera inscriptible, et le cercle circonscrit touchera l'anallagmatique en deux points m et m'. Du pôle O, menons la sécante Om, elle passera en m' et l'on aura $Om \times Om' = k^2$, k désignant le module de la transformation; si de O l'on mène la tangente à ce cercle, elle sera égale à k, et il est clair que le cercle de rayon k décrit de l'origine comme centre sera orthogonal au premier cercle considéré qui enveloppe l'anallagmatique.

C. Q. F. D.

Le cercle *directeur* est donc le cercle de rayon k décrit du pôle comme centre.

Réciproquement : *Toute enveloppe de cercle qui reste orthogonal à un cercle donné est une anallagmatique.*

Donnons-nous une *déférente,* c'est-à-dire une courbe le long de laquelle on fera mouvoir le centre d'un cercle orthogonal à un cercle fixe de rayon k; prenons le centre de ce cercle directeur pour pôle d'une transformation de module k. La tangente à la déférente au point où se trouve le centre du cercle qui engendre l'anallagmatique est perpendiculaire à la droite qui joint les deux points où le cercle mobile touche son enveloppe; pour le prouver, il suffit d'observer que le cercle mobile a pour équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2,$$

α et β désignant un point de la déférente; comme il est orthogonal au cercle $x^2+y^2=k^2$, on a

$$\alpha^2+\beta^2=R^2+k^2$$

et, par suite, son équation peut s'écrire

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+k^2=0;$$

son enveloppe s'obtient en éliminant α entre cette équation et sa dérivée

$$x+\beta' y=0,$$

qui exprime que le coefficient angulaire β' de la tangente à la déférente est égal à $-\frac{x}{y}$; la tangente à la déférente est donc perpendiculaire au rayon vecteur des deux points où le cercle mobile touche son enveloppe.

Soit P le point où la tangente à la déférente rencontre le rayon vecteur Omm' des points où le cercle mobile touche son enveloppe; on aura

$$OP=\frac{Om+Om'}{2}, \qquad k^2=Om.Om';$$

si l'on prend sur OP un point P' tel que OP. OP' $=k^2$, le point P' décrira la polaire réciproque de la déférente par rapport au cercle directeur.

De là résulte la construction suivante de l'équation de l'anallagmatique.

Soit

$$f(x', y') = 0 \tag{1}$$

l'équation de la polaire réciproque de la déférente par rapport au cercle directeur, courbe que nous appellerons aussi *seconde déférente*, les points m et m' ou plutôt l'un d'eux ayant pour coordonnées x et y, et pour rayon vecteur r, r sera racine de l'équation du second degré

$$r^2 - 2\,\mathrm{OP}\,r + k^2 = 0$$

ou

$$r^2 - 2\frac{k^2}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\,r + k^2 = 0.$$

Or on a évidemment

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{r}{\sqrt{x'^2 + y'^2}};$$

de là et de l'équation précédente on tire

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{r^2 + k^2}{2k^2} = \frac{x^2 + y^2 + k^2}{2k^2};$$

donc

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{2k^2 x}{x^2 + y^2 + k^2}, \\ y' &= \frac{2k^2 y}{x^2 + y^2 + k^2}; \end{aligned}\right. \tag{2}$$

l'équation de l'anallagmatique est donc

$$f\left(\frac{2k^2 x}{x^2 + y^2 + k^2},\ \frac{2k^2 y}{x^2 + y^2 + k^2}\right) = 0 \tag{3}$$

ou, si $f(x, y, z) = 0$ est l'équation de la seconde déférente en coordonnées homogènes,

$$f(2k^2 x,\ 2k^2 y,\ x^2 + y^2 + k^2) = 0. \tag{4}$$

La substitution (2) transforme donc une courbe en une autre,

qui est l'anallagmatique, ayant la polaire réciproque de celle-ci pour déférente.

Il est curieux de voir quelle est la transformée d'une droite

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0;$$

cette transformée est le cercle

$$2k^2(x\cos\alpha + y\sin\alpha) - p(x^2 + y^2 + k^2) = 0,$$

dont le rayon R est donné par la formule

$$R^2 = \frac{k^4}{p^2} - k^2.$$

Ce cercle est de rayon nul quand $p = k$, c'est-à-dire quand la droite donnée est tangente au cercle directeur.

Si donc on mène une tangente commune au cercle directeur et à la seconde déférente, si l'équation de cette tangente est

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - k = 0,$$

alors

$$2k^2(x\cos\alpha + y\sin\alpha) - k(x^2 + y^2 + k^2) = 0$$

sera l'équation d'un cercle de rayon nul bitangent à l'anallagmatique : son centre sera donc un foyer. Ainsi

$$x = k\cos\alpha, \qquad y = k\sin\alpha$$

sont les coordonnées d'un foyer de l'anallagmatique (3). Les foyers d'une anallagmatique sont donc sur le cercle directeur; il est facile de voir qu'ils sont aussi sur la première déférente.

En effet, ce sont les points de contact des tangentes communes au cercle directeur et à la deuxième déférente avec le cercle directeur; ces tangentes ont pour correspondants, dans la figure polaire réciproque, des points de la première déférente communs à cette déférente et au cercle directeur qui se correspond à lui-même.

Ainsi :

Les foyers d'une anallagmatique sont les intersections de la première déférente avec le cercle directeur.

Mais une anallagmatique a encore d'autres foyers qui sont les foyers mêmes de la déférente; ces foyers sont des foyers singuliers.

En effet, les foyers de la déférente sont des points de concours de droites isotropes tangentes à la déférente; ces droites sont évidemment tangentes à l'anallagmatique qui a pour points doubles les points circulaires de l'infini, car l'anallagmatique et la déférente ont évidemment les mêmes tangentes isotropes.

VI. — Anallagmatiques du troisième et du quatrième ordre.

Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la seconde déférente; nous avons vu que l'équation de l'anallagmatique était

$$f(2k^2x, 2k^2y, x^2+y^2+k^2) = 0;$$

son degré est donc en général double de celui de la seconde déférente.

La seconde déférente étant du second degré, la première sera du second degré aussi; l'équation de la seconde déférente étant de la forme

$$(1) \qquad 1 + \frac{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}{4k^4} + \frac{2ax + 2by}{2k^2} = 0,$$

celle de l'anallagmatique sera de la forme

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (x^2+y^2+k^2)^2 + 2(ax+by)(x^2+y^2+k^2) \\ \qquad\qquad + Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0, \end{array} \right.$$

elle sera du quatrième degré; lorsque la seconde déférente passe par l'origine, la première est une parabole, l'équation (1) ne contient plus de terme constant et l'anallagmatique a pour équation

$$(3) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(ax+by)(x^2+y^2+k^2) = 0.$$

Les équations (2) et (3) sont, comme il est facile de s'en assurer, les équations les plus générales des anallagmatiques

du quatrième et du troisième degré. Elles peuvent en effet s'écrire

$$(4)\qquad \begin{cases} (x^2+y^2)^2+2(ax+by)(x^2+y^2) \\ \qquad\qquad +P+2k^2(ax+by)+k^4=0, \end{cases}$$

$$(5)\qquad 2(x^2+y^2)(ax+by)+P+2k^2(ax+by)=0,$$

P désignant un polynôme homogène du second degré.

Les anallagmatiques du quatrième degré ont pour points doubles les points circulaires de l'infini, et, réciproquement, toute courbe ayant les points circulaires de l'infini pour points doubles et qui est du quatrième degré est une anallagmatique.

La première partie de ce théorème est évidente à l'inspection de l'équation (4); réciproquement, toute courbe ayant les points circulaires de l'infini pour points doubles et qui est du quatrième degré a une équation de la forme

$$(6)\qquad (x^2+y^2)^2+2(ax+by)(x^2+y^2)+P_2+P_1+P_0=0,$$

P_2, P_1, P_0 désignant des polynômes homogènes de degrés 2, 1, 0. Désignons encore cette équation par $\varphi(x, y)=0$, et transportons l'origine en α, β, nous aurons une équation de la forme

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2)^2+2(ax+by)(x^2+y^2)\\ &\quad +2(2\alpha x+2\beta y)(x^2+y^2)+P'_2+x\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+\varphi(\alpha, \beta)=0;\end{aligned}$$

cette courbe sera une anallagmatique rapportée à son pôle, si l'on a

$$2k^2(a+2\alpha)=\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha},\qquad 2k^2(b+2\beta)=\frac{\partial\varphi}{\partial\beta},$$

$$\varphi(\alpha, \beta)=k^4.$$

Ces trois équations détermineront α, β, k; pour avoir le

nombre exact de leurs solutions, observons que l'élimination de k^2 donne

$$(7)\quad \begin{cases} (b+2\beta)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}-(a+2\alpha)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta}=0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta}=4\varphi(a+2\alpha)(b+2\beta). \end{cases}$$

Posons

$$G=\alpha^2+\beta^2+a\alpha+b\beta,$$
$$H=A\alpha^2+C\beta^2+2D\alpha+2E\beta+F;$$

on pourra supposer

$$\varphi(\alpha,\ \beta)=G^2+H;$$

les équations (7) pourront alors s'écrire

$$\frac{\partial G}{\partial\beta}\left(2G\frac{\partial G}{\partial\alpha}+\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)-\frac{\partial G}{\partial\alpha}\left(2G\frac{\partial G}{\partial\beta}+\frac{\partial H}{\partial\beta}\right)=0,$$

$$\left(2G\frac{\partial G}{\partial\alpha}+\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)\left(2G\frac{\partial G}{\partial\beta}+\frac{\partial H}{\partial\beta}\right)=4(G^2+H)\frac{\partial G}{\partial\alpha}\,\frac{\partial G}{\partial\beta}$$

ou

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial\beta}\,\dfrac{\partial H}{\partial\alpha}-\dfrac{\partial G}{\partial\alpha}\,\dfrac{\partial H}{\partial\beta}=0, \\ 2G\left(\dfrac{\partial G}{\partial\alpha}\,\dfrac{\partial H}{\partial\beta}+\dfrac{\partial G}{\partial\beta}\,\dfrac{\partial H}{\partial\alpha}\right)-4H\dfrac{\partial G}{\partial\alpha}\,\dfrac{\partial G}{\partial\beta}+\dfrac{\partial H}{\partial\alpha}\,\dfrac{\partial H}{\partial\beta}=0. \end{cases}$$

La première de ces équations est du second degré, elle représente une courbe qui a pour directions asymptotiques l'axe des x et l'axe des y. La seconde est du quatrième degré, elle a les mêmes directions asymptotiques : donc ces deux équations ont huit solutions, dont six seulement sont finies; deux de ces solutions ne conviennent pas à la question : ce sont les solutions $\beta=-\frac{b}{2}$ et $\alpha=-\frac{a}{2}$ qui ont été introduites en éliminant k^2 par voie de multiplication. Donc :

Les courbes du quatrième degré qui ont les points circulaires de l'infini pour points doubles sont anallagmatiques par rapport à quatre pôles différents : elles ont donc quatre déférentes et quatre cercles directeurs; elles

sont de quatre manières différentes des enveloppes de cercles orthogonaux à des cercles fixes.

VII. — Propriétés des foyers des anallagmatiques du quatrième ordre.

On peut mettre l'équation de la seconde déférente d'une infinité de manières sous la forme

$$f(X_1, X_2, X_3) = 0, \tag{1}$$

X_1, X_2, X_3 désignant des polynômes homogènes du premier degré. Supposons, par exemple,

$$X_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1, \quad \ldots. \tag{2}$$

Si l'on fait la transformation

$$x = \frac{2k^2 x'}{x'^2 + y'^2 + k^2}, \qquad y = \frac{2k^2 y'}{x'^2 + y'^2 + k^2},$$

la courbe (1) devient une anallagmatique; or, dans cette hypothèse, (1) devient

$$f(\gamma_1 S_1, \gamma_2 S_2, \gamma_3 S_3) = 0, \tag{3}$$

et l'on a, en supprimant les accents,

$$\gamma_1 S_1 = 2k^2(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \gamma_1(x^2 + y^2 + k^2);$$

S_1 est la puissance d'un certain cercle $S_1 = 0$ dont les coordonnées du centre sont $-\frac{k^2\alpha_1}{\gamma_1}$, $-\frac{k^2\beta_1}{\gamma_1}$ et dont le rayon est $\frac{k^4}{\gamma_1^2}(\alpha_1^2 + \beta_1^2) - k^2$; il est donc orthogonal au cercle directeur. Donc :

Toute anallagmatique du quatrième degré jouit de cette propriété, qu'il existe une relation homogène du second degré entre les puissances d'un quelconque de ses points par rapport à trois cercles orthogonaux au cercle directeur.

Supposons que l'on prenne les trois droites $X_1 = 0$, $X_2 = 0$,

$X_3 = 0$ tangentes au cercle directeur; alors on peut supposer

$$\alpha_1 = \cos\varphi_1, \qquad \beta_1 = \sin\varphi_1, \qquad \gamma_1 = k, \qquad \ldots,$$

et les rayons des cercles S_1, S_2, S_3 seront $k^4 - k^4$ ou nuls; donc alors on voit que *toute anallagmatique du quatrième ordre peut être représentée par une équation de la forme*

$$f(S_1, S_2, S_3) = 0,$$

$\sqrt{S_1}$, $\sqrt{S_2}$, $\sqrt{S_3}$ *désignant les distances d'un point de la courbe à trois points fixes.*

Nous considérons en particulier trois droites $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ tangentes à la seconde déférente et au cercle directeur; la déférente en question aura une équation de la forme

$$a_1\sqrt{X_1} + a_2\sqrt{X_2} + a_3\sqrt{X_3} = 0;$$

l'équation correspondante de l'anallagmatique sera de la forme

$$b_1\sqrt{S_1} + b_2\sqrt{S_2} + b_3\sqrt{S_3} = 0.$$

Donc :

Toute anallagmatique du quatrième ordre peut être considérée comme le lieu des points tels qu'il existe une relation linéaire et homogène entre les distances de chacun de ses points à trois points fixes.

Les points fixes en question sont les foyers de l'anallagmatique. En effet, ce sont des centres de sphères de rayons nuls évidemment bitangents à l'anallagmatique, puisque ce sont les transformées de droites tangentes à la seconde déférente. *Autrement,* ce sont les points de contact du cercle directeur et de la tangente commune à la deuxième déférente et à ce cercle.

Il y a 4 tangentes communes à la deuxième déférente et au cercle directeur, donc 4 foyers, jouissant trois à trois de propriétés analogues à celles que nous venons d'énoncer.

Le nombre des foyers d'une courbe du quatrième ordre est $(4.3)^2$ ou 144; mais ce nombre n'est pas celui des foyers d'une anallagmatique. En effet, les points circulaires de l'infini sont des points doubles: cela diminue la classe de la courbe de 4 unités; par chaque ombilic on ne pourra mener que 8 tangentes à la courbe dont 4 aux ombilics mêmes; le nombre des foyers devra donc être réduit à 16. Ne considérons que les 16 foyers provenant des tangentes qui ne sont pas des tangentes aux points doubles : ce seront les 16 foyers que l'on peut trouver sur les 4 cercles directeurs, les autres foyers sont ceux des déférentes.

VIII. — Ovales de Descartes.

Parmi les anallagmatiques du quatrième ordre, il faut surtout remarquer celles qui ont les points ombilicaux non plus seulement pour points doubles, mais pour points de rebroussement. Nous les appellerons des *cartésiennes* pour une raison qui découlera de ce qui suit. Les équations des cartésiennes sont de la forme

$$(x^2+y^2)^2+2(px+qy)(x^2+y^2)+Ax^2+Cy^2+\ldots=0,$$

en choisissant convenablement les axes, et l'on a entre les coefficients la relation

$$(4x^2+12y^2)(Ax^2+Cy^2)-[(px+qy)]^2 2y=0,$$

pour $x^2+y^2=0$; donc

$$A-C-p^2+q^2+2pq\sqrt{-1}=0.$$

On choisira $q=0$ et l'on aura $A-C=p^2$; donc l'équation des cartésiennes est

$$(x^2+y^2)^2+2px(x^2+y^2)+(p^2+C)x^2+Cy^2+\ldots=0$$

ou

$$(1)\qquad (x^2+y^2+px)^2+C(x^2+y^2)+2pk^2x+k^4=0,$$

ce que l'on peut encore écrire

$$(x^2+y^2+px+k^2)^2+C(x^2+y^2)=0.$$

Cette anallagmatique a pour deuxième déférente

$$(2)\qquad \left(1+\frac{px}{2k^2}\right)^2+\frac{C}{4k^2}(x^2+y^2)=0,$$

c'est-à-dire une courbe dont le foyer est l'origine : la première déférente est donc un cercle. Réciproquement, si la première déférente d'une anallagmatique est un cercle, la seconde aura son foyer à l'origine, son équation sera de la forme (2), et l'anallagmatique correspondante (1) sera une cartésienne.

L'équation (1) peut s'écrire

$$(x^2+y^2+px+k^2)^2+C(x^2+y^2+px+k^2)-Cpx-Ck^2=0$$

ou encore

$$\left(x^2+y^2+px+k^2+\frac{C}{2}\right)^2-Cpx-Ck^2-\frac{C^2}{4}=0$$

ou, en appelant S la quantité

$$x^2+y^2+px+k^2+\frac{C}{2},$$

qui est la puissance d'un cercle, et P la fonction linéaire

$$Cpx+Ck^2+\frac{C^2}{4},$$

$$(3)\qquad S^2-P=0.$$

Cette équation représente l'enveloppe du cercle

$$(4)\qquad \lambda^2-2\lambda S+P=0.$$

Si l'on égale le discriminant du premier membre à zéro, on exprimera que le cercle se réduit à un point foyer ; or ce discriminant est un polynôme du quatrième degré en λ contenant λ en facteur. A la valeur nulle de λ ne correspond pas de foyer, les trois autres valeurs de λ fournissent trois foyers

en ligne droite; cette droite des foyers est d'ailleurs la droite sur laquelle se meut le centre du cercle (4).

Entre les distances d'un point de la courbe à deux des trois foyers que l'on vient de trouver, il existe une relation linéaire.

En effet, appelons λ_1 l'une des valeurs de λ qui réduisent le premier membre de (4) à une somme de carrés, si l'on pose

$$\lambda_1^2 - 2\lambda_1 S + P = A,$$

on pourra, en éliminant S entre cette identité et $S^2 - P = 0$, mettre l'équation de la cartésienne sous la forme

$$\lambda_1^2 - 2\lambda_1\sqrt{P} + P = A$$

ou

$$(5) \qquad \lambda_1 - \sqrt{P} = \sqrt{A};$$

en appelant λ_2 une autre valeur de λ et en posant

$$\lambda_2 - 2\lambda_2 S + P = B,$$

on aura de même

$$\lambda_2 - \sqrt{P} = \sqrt{B};$$

il existe donc entre $\sqrt{A}$ et $\sqrt{B}$ la relation linéaire

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Donc les cartésiennes ne diffèrent pas des courbes dont il a déjà été question sous le nom d'*ovales de Descartes*. La dénomination d'*ovales de Descartes* s'applique surtout au cas où les trois foyers en ligne droite sont des points réels.

IX. — Les cassinoïdes ou lemniscates.

Lorsque la première et, par suite, la seconde déférente sont des courbes à centre ayant leur centre sur le pôle de la

transformation, l'équation de l'anallagmatique est de la forme

$$(x^2+y^2)^2+Ax^2+Cy^2+k^4=0.$$

Le cas où $A=-C=2c^2$ est remarquable : la seconde déférente est une hyperbole équilatère et l'anallagmatique porte le nom de *cassinoïde, ellipse de Cassini* ou *lemniscate*. Elle a alors pour équation

$$(x^2+y^2)^2+2c^2(y^2-x^2)+k^4=0.$$

Si l'on fait $k^4=c^4-h^4$, cette courbe est telle que le produit de chacun de ses points à deux points fixes distants entre eux de $2c$ est égal à une constante h^2, ce dont on s'assure en développant l'équation

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2}=h^2,$$

ou, en coordonnées bipolaires,

$$uv=h^2.$$

La cassinoïde est une courbe que nous avons déjà rencontrée et à laquelle nous avons appris à construire la normale.

La cassinoïde cesse d'être anallagmatique quand $c=h$: elle a alors pour équation

$$(x^2+y^2)^2+(y^2-x^2)2c^2=0;$$

mais elle est unicursale et est la transformée par rayons vecteurs réciproques de l'hyperbole équilatère

$$x^2-y^2=\frac{K^4}{2c^2};$$

la cassinoïde porte alors le nom de *lemniscate de Bernoulli*. Son équation en coordonnées polaires est $r=c\sqrt{2\cos\theta}$.

X. — Transformées par rayons vecteurs réciproques et podaires de coniques.

Les transformées par rayons vecteurs réciproques de coniques ont évidemment pour équation

$$F(x^2+y^2)^2+2k^2(x^2+y^2)(ax+by)+Ax^2+2Bxy+Cy^2=0;$$

si la conique ne passe pas par le pôle, on obtient une anallagmatique du quatrième ordre; si elle passe par le pôle, l'anallagmatique est seulement du troisième ordre.

L'équation tangentielle d'une conique étant

$$A\xi^2 + 2B\eta\xi + C\eta^2 + 2D\xi + 2E\eta + F = 0,$$

une tangente aura pour équation

$$x\xi + \eta y = 1;$$

la perpendiculaire à cette tangente menée de l'origine est

$$x\eta - y\xi = 0,$$

l'élimination de ξ et η donne la podaire : pour trouver cette podaire, il suffit de remplacer ξ et η par

$$\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{y}{x^2+y^2},$$

dans l'équation tangentielle de la conique, comme l'on voit :

La podaire d'une courbe n'est autre chose que la transformée par rayons vecteurs réciproques de sa polaire réciproque, ce que l'on savait d'ailleurs.

On peut donc dire que les podaires de coniques sont aussi des anallagmatiques du quatrième ordre.

Parmi les podaires de coniques, il faut remarquer la podaire de cercle qui a pour équation

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - R^2(x^2 + y^2) = 0,$$

R désignant le rayon du cercle et $2a$ la distance du centre au pôle. En coordonnées polaires, son équation est

$$(r^2 - 2ar\cos\theta)^2 - R^2 r^2 = 0$$

ou

$$r^2 - 2ar\cos\theta - Rr = 0,$$

ou enfin

$$r = R + 2a\cos\theta.$$

Cette courbe est une conchoïde du cercle $r = 2a\cos\theta$. On lui donne aussi le nom de *limaçon de Pascal*.

Quand $R = 2a$, on a

$$r = 4a\cos^2\tfrac{1}{2}\theta = 2R\cos^2\tfrac{1}{2}\theta:$$

la courbe est alors la *cardioïde*.

Dans la conchoïde de cercle, la déférente, ou l'une des déférentes, est un cercle, et l'un des cercles directeurs se réduit à un simple point.

XI. — Analiagmatiques du troisième ordre.

Lorsque la première déférente est une parabole, la seconde déférente passe par l'origine, et l'anallagmatique est du troisième ordre; elle a alors pour équation

$$(x^2+y^2)(ax+by)+Ax^2+Cy^2+k^2(ax+by)=0.$$

Les anallagmatiques du troisième degré passent par les ombilics du plan. Il est facile de voir que toute courbe de troisième degré passant par les ombilics est une anallagmatique; et, en effet, une telle courbe a pour équation

$$(x^2+y^2)(ax+by)+Ax^2+Cy^2+lx+my+n=0.$$

Appelons $\varphi(x, y)$ le premier membre de cette équation, et transportons l'origine en α, β; on aura, pour nouvelle équation de la courbe,

$$\varphi(a, b)+x\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+U+(x^2+y^2)(ax+by)=0.$$

Or on peut disposer de k, α et β de telle sorte que

$$\varphi(\alpha, \beta)=0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=k^2a, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}=k^2b;$$

l'élimination de k donne

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0, \quad b\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - a\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = 0;$$

les points α, β d'intersection de ces deux courbes sont les intersections de la courbe avec l'une de ses polaires dont le pôle est à l'infini. Ce théorème est donc démontré ; on remarquera que, parmi les six solutions de ces équations, l'une est infinie : c'est la solution qui correspond à $a\alpha + b\beta = 0$ et à la droite de l'infini.

Les anallagmatiques les plus remarquables du troisième ordre ont un point double, elles sont unicursales ; leur équation est

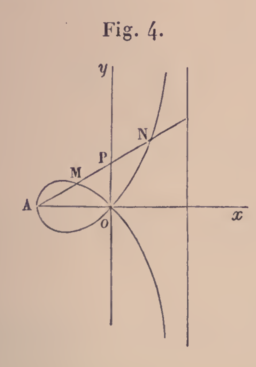
$$(x^2+y^2)(ax+by) + Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

La *strophoïde* a pour équation

$$x(x^2+y^2) - a(y^2-x^2) = 0;$$

c'est le lieu des points obtenus comme il suit. Étant donnés un point fixe A (*fig.* 4) et deux droites rectangulaires ox et

Fig. 4.



oy, dont l'une passe par A, on prend, sur le rayon vecteur AP, des longueurs PM et PN égales à oP ; le lieu de M et N est la strophoïde ; on a

$$AM \times AN = \text{const.}$$

La strophoïde est une podaire de parabole, le pôle est le pied

de la directrice de la parabole : c'est l'enveloppe d'un cercle qui passe par le pied de la directrice de cette parabole et qui a son centre sur la parabole.

La *cissoïde* a un point de rebroussement; son équation est

$$x(x^2+y^2)=2Ry^2.$$

On connaît la génération de cette courbe donnée par Dioclès (t. II, p. 40).

XII. — Transformation de M. Hirst.

Soient O un point fixe, S une conique : par O menons la sécante Omm' rencontrant S en m et m'; si a et a' sont deux points conjugués harmoniques de m et m' les figures a et a' seront transformées l'une de l'autre par la méthode de M. Hirst.

Quand la conique S est un cercle et que le point O est son centre, la transformation de Hirst coïncide avec la transformation par rayons vecteurs réciproques : le module est alors le rayon du cercle (facile à vérifier). Les formules de transformation de Hirst sont

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'},$$

$$\begin{aligned}Axx'+A'yy'+A''zz'+B(yz'+zy')\\ +B'(zx'+xz')+B''(xy'+yx')=0,\end{aligned}$$

en prenant le point O pour origine; la conique S a alors pour équation

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy=0.$$

XIII. — Autre mode de transformation.

Considérons deux coniques S et S' : soient P la polaire d'un point M par rapport à S, P' la polaire de M par rapport à S'; les droites P et P' se rencontrent en un point M' qui corres-

pond à M. Soient x, y, z les coordonnées de M; x', y' et z' celles de M' : on a évidemment

$$x' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y' \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z' \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

$$x' \frac{\partial \psi}{\partial x} + y' \frac{\partial \psi}{\partial y} + z' \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0;$$

$\varphi = 0$ et $\psi = 0$ désignant les équations des coniques S et S', on en conclut

$$x' : \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y, z)} = y' : \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(z, x)} = z' : \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)};$$

on aurait de même

$$x : \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y', z')} = y : \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(z', x')} = z : \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x', y')}.$$

On voit qu'il y a une sorte de réciprocité entre les points x, y, z et x', y', z'.

La transformation

$$\frac{x}{y'z'} = \frac{y}{x'z'} = \frac{z}{x'y'}$$

est un cas particulier de celle que nous venons d'examiner : en effet, ces formules peuvent s'écrire

$$xx' = yy' = zz',$$

ou

$$xx' - zz' = 0, \qquad yy' - zz' = 0.$$

Ce sont les équations des polaires de x, y, z par rapport aux deux coniques $x^2 - z^2 = 0$, $y^2 - z^2 = 0$. Plus généralement, on peut considérer le point (x', y', z') comme l'intersection des polaires de x, y, z par rapport aux coniques conjuguées

$$(\mathrm{C}) \qquad \begin{cases} A x^2 + B y^2 + C z^2 = 0, \\ A' x^2 + B' y^2 + C' z^2 = 0, \end{cases}$$

A, B, C, A', B', C' satisfaisant aux équations

$$BC' - CB' = CA' - AC' = AB' - BA'.$$

De ces relations on déduit

$$(A + B + C)(BC' - CB') = 0, \quad \ldots$$

ou

$$A + B + C = 0, \qquad A' + B' + C' = 0;$$

car on ne peut pas supposer $BC' - CB' = 0$: ce serait en effet réduire les deux coniques (C) à une seule. Or $A + B + C = 0$ signifie que la conique $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$ passe par le point $x = y = z$; *donc enfin la transformation*

$$(a) \qquad \frac{x}{y'z'} = \frac{y}{z'x'} = \frac{z}{x'y'}$$

peut être définie géométriquement comme il suit :

Soient S *et* S' *deux coniques passant par le point de concours des bissectrices de leur triangle autopolaire commun; soient* P *et* P' *les polaires d'un point* (x, y, z) *par rapport à ces deux coniques;* x', y', z' *les coordonnées du point de rencontre de ces deux droites* P *et* P' : *on aura précisément entre les coordonnées des points* x, y, z *et* x', y', z' *les relations* (a).

EXERCICES ET NOTES.

1. Soient r et θ les coordonnées polaires d'une courbe, r' et θ' d'autres coordonnées polaires, telles que

$$r = r'^n, \qquad \theta = n\theta',$$

la courbe ayant pour coordonnées polaires r' et θ' est une transformée de la première (pour $n = -1$, on a la transformation par rayons vecteurs réciproques) : deux courbes se coupent sous le même angle que leurs transformées, quel que soit n.

$r = a\cos\theta$ représente un cercle et $r^n = a^n \cos n\theta$ représente, pour $n = 1$, un cercle; pour $n = -1$, une droite; pour $n = 2$, une lemniscate; pour $n = -2$, une hyperbole équilatère; pour $n = \frac{1}{2}$, un lima-

çon de Pascal; pour $n = -\frac{1}{2}$, une parabole; pour $n = -\frac{1}{3}$, une caustique par réflexion de parabole, etc.

2. Le cercle osculateur de $r^m = a^m \cos m\theta$ intercepte sur le rayon vecteur une corde c, telle que l'on a, en appelant R le rayon de courbure, $R = \frac{m+1}{2} c$. (Allégret.)

3. Voici quelques propriétés des courbes du troisième degré : l'équation de toute courbe du troisième degré peut se mettre sous la forme

$$\alpha\beta\gamma + \lambda\alpha'\beta'\gamma' = 0,$$

α, β, γ, α', β', γ' désignant des fonctions linéaires.

Si d'un point M pris sur une courbe du troisième degré on mène des tangentes à cette courbe, par quatre points de contact A_1, A_2, A_3, A_4 passent trois couples de droites dont les points de concours sont sur la courbe; les tangentes en ces points de concours passent par un même point situé sur la courbe et sur la tangente en M. (Maclaurin.)

Si l'on mène d'un point les six tangentes que l'on peut mener à une courbe du troisième degré, les six points de contact (ce que l'on sait par la théorie des polaires) sont sur une conique; les six points restants où ces tangentes rencontrent la courbe sont sur une autre conique doublement tangente à la première.

Lorsqu'une courbe du troisième ordre est à la fois inscrite et circonscrite à un triangle ABC, le produit des rayons de courbure aux sommets A, B, C est égal au cube du rayon du cercle circonscrit au triangle. (Mannheim.)

Les courbes du troisième ordre peuvent être représentées par des équations de la forme

$$\alpha\beta\gamma + \lambda\alpha'^3 = 0,$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\lambda\alpha\beta\gamma = 0.$$

A chacune de ces formes correspondent des propriétés de la courbe que nous nous dispenserons d'énoncer.

(Pour plus de détails, on consultera avec fruit les *Leçons de Géométrie* de Clebch, recueillies par Lindemann. Traduction française par Benoîst, chez Gauthier-Villars et Fils, ou la *Géométrie analytique* de M. Salmon).

4. Le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère

est une courbe du troisième degré qui par projection fournit toutes les courbes du troisième degré. Cette courbe passe par les ombilics.

(SCHRÖTTER.)

5. Si l'on mène à une courbe algébrique la série des tangentes parallèles à une direction donnée, le centre des moyennes distances des points de contact sera indépendant de cette direction.

(CHASLES, LIOUVILLE.)

6. Soient M_1, M_2, ... les points d'intersection de deux courbes algébriques; soient R_i et r_i les rayons de courbure de ces courbes au point M_i, Ω_i et ω_i les angles que les tangentes à ces courbes en M_i font avec un axe fixe : on a

$$\sum\left(\frac{\cos\Omega_i}{R_i}-\frac{\cos\omega_i}{r_i}\right)\frac{1}{\sin^3(\Omega_i-\omega_i)}=0.$$

(LIOUVILLE, *Journal de Mathématiques*, t. VI.)

CHAPITRE V.

DES TRANSCENDANTES ENGENDRÉES PAR L'INTÉGRATION INDÉFINIE.

I. — Préliminaires.

Toute relation entre une ou plusieurs fonctions d'une ou de plusieurs variables, ces variables et les dérivées des fonctions en question, est ce que l'on appelle une *équation différentielle.*

Une équation différentielle *ordinaire* est une relation entre une ou plusieurs fonctions d'une seule variable et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre de la dérivée de l'ordre le plus élevé qui entre dans cette équation.

Une équation est aux *dérivées partielles* quand elle contient des dérivées partielles relatives à plusieurs variables; son ordre est celui de la dérivée d'ordre le plus élevé qui entre dans cette équation.

Enfin on appelle *équations aux différentielles totales* celles qui contiennent les différentielles totales d'une ou de plusieurs fonctions et de leurs variables.

Les solutions des équations différentielles portent le nom d'*intégrales* de ces équations.

Les équations différentielles les plus simples sont les équations différentielles du premier ordre dans lesquelles la fonction inconnue ou la variable n'entrent pas. Au fond, ces deux cas n'en font qu'un. En effet, toute équation différentielle du premier ordre est une relation

$$f(x, y, dx, dy) = 0$$

entre la fonction y, sa variable x et la dérivée $\frac{dy}{dx}$ ou les différentielles dx, dy. Or on peut supposer à volonté que x ou que y est la fonction, et y ou x sera alors la variable indépendante; si donc, par exemple, x n'entre pas dans l'équation, elle pourra se ramener à la forme

$$f(y, dx, dy) = 0,$$

et, comme elle est nécessairement homogène en dx et dy, on peut en tirer, théoriquement,

$$\frac{dx}{dy} = \varphi(y);$$

on en déduit

$$x = \int \varphi(y)\, dy + \text{const.},$$

et x s'obtient en fonction de y au moyen d'une intégration. La question est alors dite *ramenée aux quadratures*. Si y n'entrait pas dans l'équation, on en déduirait

$$\frac{dy}{dx} = \psi(x), \qquad y = \int \psi(x)\, dx + \text{const.}$$

et le problème serait encore ramené aux quadratures [à la quadrature de la courbe dont l'ordonnée est $\psi(x)$]. Le nombre des fonctions dont on sait trouver l'intégrale est restreint; mais nous verrons bientôt que cette circonstance ne tient pas à l'imperfection des méthodes que nous avons fait connaître, mais bien à ce que certaines intégrales sont des transcendantes *sui generis*, que l'on est dans l'impossibilité absolue d'exprimer à l'aide des signes de l'Algèbre et de la Trigonométrie employés en nombre fini ou, comme l'on dit quelquefois, en *termes finis*. Nous nous ferons comprendre en faisant observer que, si l'on ne connaissait que les fonctions algébriques, on serait dans l'impossibilité de donner l'expression de l'intégrale de $\frac{dx}{x}$, le logarithme de x ne pouvant pas s'exprimer algébriquement au moyen de x.

Pour élargir le cadre du Calcul intégral, nous étudierons dans les Chapitres suivants les intégrales des fonctions algébriques qui sont des transcendantes nouvelles, afin de pouvoir les introduire dans les calculs, comme on a déjà introduit les logarithmes, leurs inverses les exponentielles et les fonctions trigonométriques, fonctions qui se seraient, comme nous le verrons, présentées d'elles-mêmes dans l'étude des intégrales des fonctions algébriques les plus simples.

II. — Fonctions implicites définies par des équations différentielles.

Considérons le système d'équations différentielles simultanées au nombre de ν

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi(x, y, z, \ldots, t),\\ \frac{dy}{dt} &= \chi(x, y, z, \ldots, t),\\ \frac{dz}{dt} &= \psi(x, y, z, \ldots, t),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

entre les ν *fonctions* $x, y, z, \ldots,$ *la variable* t *et leurs dérivées* $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \ldots,$ *résolues par rapport à ces dérivées.*

Si l'on suppose que, $x, y, z, \ldots, t$ *variant respectivement autour des points* $x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0$ *les fonctions* φ, $\chi, \psi, \ldots$ *restent synectiques par rapport à ces variables, les équations* (1) *admettront une solution, se réduisant au système* $x = x_0, y = y_0, z = z_0, \ldots,$ *pour* $t = t_0$.

Chacune des fonctions $x, y, z, \ldots$ *restera synectique à l'intérieur d'un cercle décrit du point* t_0 *comme centre avec un rayon* R *défini par la formule*

$$R = \Lambda\left[1 - e^{-\frac{1}{(\nu+1)M}}\right],$$

Λ *désignant une quantité moindre que le plus petit des modules de* $x - x_0, y - y_0, \ldots,$ *pour lesquels* $\varphi, \chi, \psi, \ldots$

cesseraient d'être synectiques autour des points $x_0, y_0, \ldots,$ t_0 *et* M *désignant une quantité plus grande que le plus grand des modules maxima de* $\varphi, \chi, \psi, \ldots,$ *quand* $x,$ $y, z, \ldots$ *se meuvent dans les cercles de rayon* Λ *ayant leurs centres en* $x_0, y_0, \ldots, t_0.$

Admettons un instant la propriété qu'il s'agit d'établir, et calculons les dérivées successives des fonctions $x, y, z, \ldots.$ Pour cela différentions les formules (1), nous aurons

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial \chi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \chi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \ldots + \frac{\partial \chi}{\partial t},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ou, en remplaçant $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \cdots$ par leurs valeurs (1)

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \chi\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \ldots, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \varphi\frac{\partial \chi}{\partial x} + \chi\frac{\partial \chi}{\partial y} + \ldots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

On aurait de même $\frac{d^3 x}{dt^2}, \frac{d^3 y}{dt^3}, \cdots,$ en différentiant ces formules (2) et en remplaçant $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \cdots$ par leurs valeurs (1), et ainsi de suite. $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt}, \frac{d^3 x}{dt^2}, \cdots$ ne seront autre chose que la fonction φ et ses dérivées totales successives que nous représenterons par $\varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t), \ldots$; de même $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \cdots$ pourront être représentés par $\chi(t), \chi'(t), \ldots,$ et l'on aura, par la formule de Taylor supposée applicable,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x_0 + (t-t_0)\varphi(t_0) \\ &\quad + \frac{(t-t_0)^2}{1.2}\varphi'(t_0) + \frac{(t-t_0)^3}{1.2.3}\varphi''(t_0) + \ldots, \\ y &= y_0 + (t-t_0)\chi(t_0) \\ &\quad + \frac{(t-t_0)^2}{1.2}\chi'(t_0) + \frac{(t-t_0)^3}{1.2.3}\chi''(t_0) + \ldots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \end{aligned}\right.$$

je vais prouver que ces formules sont *effectivement* des intégrales de (1). Et d'abord je prouverai qu'elles sont convergentes :

En effet, on sait que l'on a (p. 5)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{\alpha+\beta+\ldots}\varphi(x_0, y_0, \ldots)}{\partial x_0^\alpha\, \partial y_0^\beta \ldots} \\
&\quad = \alpha!\beta!\ldots\left(\frac{1}{2\pi}\right)^\nu \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ldots \frac{e^{-(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta+\ldots)\sqrt{-1}}}{A^\alpha B^\beta C^\gamma} \\
&\quad\quad \times \varphi(x_0 + A e^{\xi\sqrt{-1}}, y_0 + B e^{\eta\sqrt{-1}}, \ldots)\, d\xi\, d\eta \ldots,
\end{aligned}$$

A, B, C, ... désignant des quantités moindres que les rayons des plus grands cercles décrits de x_0, y_0, z_0, ... comme centres qui ne contiennent pas de points critiques de la fonction φ. Si dans cette formule on remplace l'exponentielle par son module 1, la fonction φ par une quantité M supérieure à la plus grande valeur que peut prendre son module dans les cercles de rayons A, B, ..., dont il vient d'être question et A, B, C, ... par une quantité Λ moindre que chacun d'eux, on aura

$$\operatorname{mod} \frac{\partial^{\alpha+\beta+\ldots}\varphi(x_0, y_0, \ldots)}{\partial x_0^\alpha\, \partial y_0^\beta \ldots} < \frac{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}{(2\pi)^\nu} \int_0^{2\pi} \ldots \frac{M}{\Lambda^{\alpha+\beta+\ldots}}\, d\xi\, d\eta \ldots,$$

ou

$$(4) \qquad \frac{\partial^{\alpha+\beta+\ldots}\varphi(x_0, y_0, \ldots)}{\partial x_0^\alpha\, \partial y_0^\beta \ldots} < \frac{\alpha!\beta!\ldots M}{\Lambda^{\alpha+\beta+\ldots}}.$$

Maintenant considérons les équations

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{M}{\left(1 - \dfrac{x - x_0}{\Lambda}\right)\left(1 - \dfrac{y - y_0}{\Lambda}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{t - t_0}{\Lambda}\right)}, \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{M}{\left(1 - \dfrac{x - x_0}{\Lambda}\right)\left(1 - \dfrac{y - y_0}{\Lambda}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{t - t_0}{\Lambda}\right)}; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

de ces équations on tire $dx = dy = \ldots$ et, par suite,

$$x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = \ldots;$$

donc

$$\frac{dx}{dt} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{\Lambda}\right)^\nu \left(1 - \frac{t - t_0}{\Lambda}\right)},$$

et par suite

$$dx \left(1 - \frac{x - x_0}{\Lambda}\right)^\nu = M \frac{dt}{1 - \frac{t - t_0}{\Lambda}}.$$

En intégrant depuis $t = t_0$, on a

$$(a) \quad \frac{1}{\nu + 1}\left[1 - \left(1 - \frac{x - x_0}{\Lambda}\right)^{\nu+1}\right] = - M \log\left(1 - \frac{t - t_0}{\Lambda}\right),$$

et les fonctions x, y, ... resteront synectiques, tant que cette équation et sa dérivée relative à x n'auront pas de racine commune. Cette dérivée est

$$\left(1 - \frac{x - x_0}{\Lambda}\right)^\nu = 0;$$

la valeur de x tirée de là et portée dans (a) donne

$$1 + (\nu + 1) M \log\left(1 - \frac{t - t_0}{\Lambda}\right) = 0,$$

ou

$$t - t_0 = \left(1 - e^{-\frac{1}{(\nu+1)M}}\right)\Lambda.$$

En résumé, les équations (5) fournissent des valeurs de $x, y, z, \ldots$ synectiques autour du point $t = t_0$, et que l'on peut développer en série à l'intérieur d'un cercle décrit autour de t_0 avec un rayon R fini, déterminé par la formule

$$R \leq \left(1 - e^{-\frac{1}{(\nu+1)M}}\right)\Lambda.$$

Les formules (3) serviront à effectuer les développements de x, y, z, ...; mais il faudra y supposer φ, χ, ψ, ... égaux à $\frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{\Lambda}\right)\cdots}$.

Revenons actuellement aux équations (1) : si, à l'aide de ces équations on forme, comme il a été expliqué, les formules (3

celles-ci seront convergentes, et en effet on vient de voir qu'elles étaient convergentes pour le cas particulier où l'on remplacerait

$$\varphi, \chi, \psi, \ldots \text{ par } \frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{\Lambda}\right)\left(1-\frac{y-y_0}{\Lambda}\right)\cdots} = \Phi.$$

Or, dans ce cas, 1° les modules $\varphi, \chi, \psi, \ldots$ pour $t = t_0$ ne peuvent qu'augmenter, puisqu'ils sont remplacés par M qui est supérieur à chacun d'eux, 2° les modules de leurs dérivées ne peuvent qu'augmenter, puisqu'ils sont moindres en vertu de (4) que les dérivées de Φ, à savoir

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots}\Phi}{\partial x_0^\alpha \partial y_0^\beta \cdots} = \frac{\alpha!\,\beta!\ldots M}{\Lambda^{\alpha+\beta+\cdots}}.$$

Alors, en vertu des formules (1), (2) et de celles que l'on obtiendrait en les différentiant encore, $x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots$ pour $t = t_0$, c'est-à-dire les valeurs des modules des fonctions $\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \ldots, \psi(t_0), \psi'(t_0), \ldots$, ne peuvent qu'augmenter et, par suite [les séries (3) étant convergentes après la substitution devaient l'être avant], la convergence des séries (3) est établie; si l'on tire des formules (3) les valeurs de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \cdots$ pour les substituer dans (1), on aura

$$\varphi(t_0) + \frac{t-t_0}{1}\varphi'(t_0) + \ldots = \varphi(x, y, \ldots, t);$$

. . . .

Mais, en développant les seconds membres, on a

$$(6)\quad \begin{cases} \varphi(t_0) + \dfrac{t-t_0}{1}\varphi'(t_0) + \ldots \\ \quad = \varphi(x_0, y_0, \ldots, t_0) + (t-t_0)\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)_0 \\ \qquad + \dfrac{(t-t_0)^2}{1.2}\left(\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0 + \ldots, \end{cases}$$

$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0, \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0, \cdots$ désignant les dérivées totales de φ pour

$t = t_0$ prises en regardant $x, y, z, \ldots$ comme des fonctions de t définies par les formules (3). Or

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial t};$$

si l'on fait $t = t_0$, on a, d'après les formules (3),

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t_0), \qquad \frac{dy}{dt} = \chi(t_0), \qquad \ldots;$$

on a donc

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\varphi_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\chi_0 + \ldots.$$

Le second membre de cette formule est précisément ce que nous avons appelé $\varphi'(t_0)$, et ainsi de suite ; la formule (6) est donc identique, et par suite il est prouvé que les formules (1) admettent une solution $x, y, z, \ldots$ qui pour $t = t_0$ se réduit à $x_0, y_0, z_0, \ldots$ et reste synectique dans le voisinage de ce point, tant que le module de $t - t_0$ reste inférieur à

$$\Lambda\left[1 - e^{-\frac{1}{(\nu+1)M}}\right].$$

III. — Remarques au sujet du théorème précédent.

Il est facile de prouver qu'il n'existe qu'un seul système de valeurs de $x, y, z, \ldots$, monodromes, satisfaisant aux équations (1) et se réduisant à $x_0, y_0, \ldots$ pour $t = t_0$. En effet, s'il existait un second système jouissant de cette propriété, on pourrait le représenter par $x + \xi, y + \eta, z + \zeta, \ldots$, on aurait alors

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0,$$

pour $t = t_0$, et

$$\frac{dx}{dt} + \frac{d\xi}{dt} = \varphi(x + \xi, y + \eta, \ldots);$$

d'où l'on conclurait, en vertu de (1),

$$\frac{d\xi}{dt} = \varphi(x + \xi, y + \eta, \ldots) - \varphi(x, y, \ldots).$$

Remplaçons dans ces formules $x, y, z, \ldots$ par leurs valeurs en fonction de t, on aura

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \ldots,$$
$$\frac{d\eta}{dt} = \xi \frac{\partial \chi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \chi}{\partial y} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

pour $t = t_0$; $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ sont nuls : donc $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \ldots$ le sont aussi : $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ sont donc de la forme $(t - t_0)^\alpha \mathrm{A}$, où α est au moins égal à deux, ce qui est absurde. En effet, dans les équations précédentes, les seconds membres sont d'ordre plus élevé par rapport à $t - t_0$ que les premiers.

La démonstration du théorème fondamental que nous venons de donner est due à Cauchy; mais nous avons profité de quelques simplifications apportées par Briot et Bouquet (*Théorie des fonctions doublement périodiques*).

IV. — Sur l'existence et l'expression des fonctions implicites.

Du théorème démontré (§ II) résulte la synecticité des fonctions implicites. En effet, considérons les équations

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_n = 0,$$

dans lesquelles $f_1, \ldots, f_n$ désignent des fonctions de $n+1$ variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et x; ces équations définissent n fonctions implicites $y_1, y_2, \ldots$ de x; ces fonctions sont synectiques, car elles satisfont aux équations différentielles

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y'_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} y'_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y_1} y'_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n} y'_n = 0$$

ou bien

$$
(1)\qquad \left\{\begin{array}{l}
y'_1 = A_{11}\dfrac{\partial f_1}{\partial x} + A_{12}\dfrac{\partial f_2}{\partial x} + \ldots + A_{1n}\dfrac{\partial f_n}{\partial x},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y'_n = A_{n1}\dfrac{\partial f_1}{\partial x} + A_{n2}\dfrac{\partial f_2}{\partial x} + \ldots + A_{nn}\dfrac{\partial f_n}{\partial x},
\end{array}\right.
$$

dans lesquelles A_{11}, A_{12}, ... ont des valeurs bien déterminées si l'on n'a pas

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = 0,$$

et elles seront développables suivant les puissances entières de $x - x_0$ à l'intérieur d'un cercle de rayon

$$R = \Lambda\left(1 - e^{-\frac{1}{M(n+1)}}\right).$$

Λ désignant le plus petit des modules $x - x_0$, $y_1 - y_{10}$, ... pour lesquels les seconds membres de (1) cesseraient d'être synectiques et M désignant le module maximum de ces fonctions quand x, y_1, y_2, ... se meuvent dans des cercles de rayon Λ ayant leurs centres en x_0, y_{10}, y_{20}, ...; enfin y_{10}, y_{20} sont les valeurs de y_1, y_2, ... pour $x = x_0$.

V. — Remarque fondamentale au sujet des divers contours d'intégration que peut suivre une variable.

En vertu d'un théorème connu de Cauchy, l'intégrale d'une fonction $f(z)$ prise entre z_0, Z reste la même quand on déforme d'une manière continue le contour d'intégration, pourvu que ce contour ne franchisse pas de point critique de la fonction.

Cela posé, imaginons un contour d'intégration quelconque, $z_0 Z$; sur ce contour appliquons un fil flexible attaché en z_0 et fixé en ce point; au point Z fixons un anneau et faisons passer l'extrémité du fil par cet anneau. Supposons que la fonction f n'ait que des points critiques isolés (nous n'au-

rons pas dans la suite d'autres cas à considérer); en ces points critiques fichons des piquets ronds; cela fait, tirons sur notre fil.

Le fil va changer de forme, et, pendant sa déformation, il représentera, à chaque instant, un nouveau contour d'intégration fournissant toujours la même valeur de l'intégrale, puisque, grâce aux piquets fichés aux points critiques, le contour d'intégration représenté par le fil n'a pu franchir un tel point.

Supposons maintenant que notre fil soit complètement tendu : il affectera la forme générale d'un polygone ayant pour côtés les droites joignant les points critiques, d'une droite joignant le point z_0 à un point critique et d'une droite joignant un point critique au point Z.

Lâchons le fil en Z, puis, appliquant un piquet sur chacun des côtés du polygone, ramenons ce piquet en z_0 en entraînant le fil; passons ensuite successivement le piquet entre le fil et les piquets fichés aux points critiques qu'il pourrait embrasser une ou plusieurs fois et ramenons le piquet mobile en z_0 en entraînant les brins de fil. Le contour d'intégration représenté par le fil, en se déformant, ne franchit toujours pas de point critique, et notre intégrale prise le long du contour définitif a la même valeur que l'intégrale prise le long du contour primitif.

Le contour d'intégration affecte alors la forme d'une série de boucles entourant les points critiques, que l'on peut considérer comme des *lacets,* et d'une ligne ordinairement droite allant de z_0 à Z. Il n'y aurait d'exception à cette règle que s'il se trouvait un point critique sur la droite $z_0 Z$; le chemin rectiligne $z_0 Z$ pourrait alors être remplacé par un chemin légèrement courbe ne passant pas par le point critique. De là résulte cette proposition fondamentale :

Théorème. — *Lorsqu'on veut intégrer la fonction $f(z)$ entre les limites z_0 et Z, tout contour peut être ramené, sans changer la valeur de l'intégrale, à une suite de lacets*

enveloppant les points critiques, ayant leur entrée en z_0 *et au chemin rectiligne* $z_0 Z$.

VI. — Des transcendantes auxquelles conduit l'intégration des fonctions rationnelles. — Logarithmes.

Le problème qui se présente au début du Calcul intégral est l'intégration des fonctions rationnelles. Pour le résoudre, il est naturel de décomposer ces fonctions en éléments simples de la forme Ax^m et $\frac{A}{(x-a)^n}$, où a, A, m, n désignent des constantes, dont les deux dernières sont des entiers. Chacune de ces fonctions simples peut être intégrée ; toutefois, quand $n = 1$, on est conduit à la considération de la fonction

$$\int \frac{dx}{x-a},$$

que l'on ramène facilement, par un changement de variable, à

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \int_1^x \frac{dz}{z}.$$

Cette fonction est la fonction logarithmique ; bien qu'elle nous soit parfaitement connue, il ne sera pas inutile de déduire ses propriétés de l'équation

$$\log x = \int_1^x \frac{dz}{z},$$

de prouver que cette fonction ne peut pas s'exprimer en fonction algébrique de x et de montrer qu'elle constitue une transcendante.

D'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, tout contour d'intégration conduisant de 1 à x peut être ramené à une série de lacets ayant leur entrée au point 1 enveloppant le point critique 0, et au contour rectiligne allant du point 1 au point x. Appelons u la valeur de l'intégrale prise le long de ce dernier chemin.

L'intégrale prise le long du lacet se compose : 1° de l'intégrale

$$\int_1^\varepsilon \frac{dz}{z} = -\int_\varepsilon^1 \frac{dz}{z},$$

prise le long d'un bord; 2° de l'intégrale prise le long du cercle, laquelle est égale à $\pm 2\pi\sqrt{-1}$ multiplié par le résidu de $\frac{1}{z}$ ou 1 ; 3° de l'intégrale

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dz}{z}$$

prise le long de l'autre bord, cette intégrale détruit la première; en tout on a donc, pour l'intégrale prise le long du lacet, $\pm 2\pi\sqrt{-1}$, suivant que le lacet a été parcouru dans le sens direct ou rétrograde.

Supposons que le lacet ait été parcouru m fois dans un sens, n fois dans un autre, et que l'on ait ensuite parcouru le chemin rectiligne; on voit que la valeur de l'intégrale sera

$$2N\pi\sqrt{-1} + u,$$

N représentant la différence des entiers m et n, et u représentant l'intégrale prise le long du chemin rectiligne qui va du point 1 au point z. L'intégrale a donc une infinité de valeurs.

Si l'on appelle y le logarithme de x, en sorte que

$$y - \int_1^x \frac{dz}{z} = 0,$$

la fonction inverse x de y pourra être désignée par e^y et, en vertu d'un théorème connu (p. 127), e^y sera monodrome, monogène, finie et continue dans toute l'étendue du plan, excepté pour $x = 0$ et $x = \infty$; mais alors y est infini. D'après ce que l'on a vu tout à l'heure, on aura, pour toutes les valeurs entières de N,

$$e^{y+2N\pi\sqrt{-1}} = e^y,$$

et la fonction e^y est périodique; sa période est $2\pi\sqrt{-1}$.

L'équation

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \quad \text{ou} \quad d(\log x + \log y) = 0,$$

qui peut aussi s'écrire

$$y\,dx + x\,dy = 0 \quad \text{ou} \quad d\,xy = 0$$

montre que $\log x + \log y$ et xy, ayant leurs différentielles nulles en même temps, sont constantes en même temps; on peut donc poser

$$\log x + \log y = f(xy),$$

f désignant une fonction que nous déterminerons en faisant $x = 1$, alors $\log x = 0$, et l'on a

$$\log y = f(y);$$

la fonction f est donc un logarithme, et l'on a

$$\log x + \log y = \log xy.$$

Par suite, si l'on pose $\log x = u$, $\log y = v$, on a

$$u + v = \log(e^u e^v)$$

ou enfin

$$e^{u+v} = e^u e^v.$$

Comme on le voit, la théorie des exponentielles et des logarithmes découle de la façon la plus simple des principes élémentaires du Calcul intégral.

La fonction $\log x$ ne saurait être algébrique, son inverse e^x par suite non plus; en effet, pour une même valeur de x, une fonction algébrique de x n'a qu'un nombre limité de valeurs se permutant les unes dans les autres.

VII. — Transcendantes auxquelles on est conduit par l'intégration des fonctions algébriques. — Intégrales abéliennes.

On sait intégrer les fonctions rationnelles à l'aide de la transcendante logarithmique. Il y a lieu de chercher à intégrer les fonctions algébriques; mais, quand on aborde ce pro-

blème général, on le trouve hérissé de difficultés : tout porte à croire que les intégrales des fonctions algébriques définissent des transcendantes nouvelles.

On a donné le nom d'intégrales *abéliennes* aux intégrales des fonctions algébriques irrationnelles.

VII. — Intégrales des fonctions algébriques du second ordre des fonctions circulaires et hyperboliques.

Soit y une fonction algébrique du second ordre définie par l'équation

$$X_0 y^2 + X_1 y + X_2 = 0, \tag{1}$$

X_0, X_1, X_2 désignant des polynômes de degrés 0, 1, 2.

Toute intégrale de la forme

$$\int f(x, y)\,dx, \tag{2}$$

dans laquelle y désigne une solution de l'équation (1) pourra s'obtenir au moyen des fonctions algébriques et logarithmiques.

D'abord, en supposant $y = u - \frac{X_1}{2X_0}$, l'équation (1) devient

$$X_0 u^2 + X_2 + \frac{X_1^2}{4X_0} = 0,$$

et u^2 n'est autre chose que la racine d'un polynôme du second degré ; l'intégrale (2) est donc l'intégrale d'une fonction rationnelle de x et d'un radical de la forme $\sqrt{ax^2 + bx + c}$; on a vu que l'intégrale (2) dépendait algébriquement et même rationnellement des intégrales simples

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

lesquelles pourraient elles-mêmes être rendues intégrales de fonctions rationnelles.

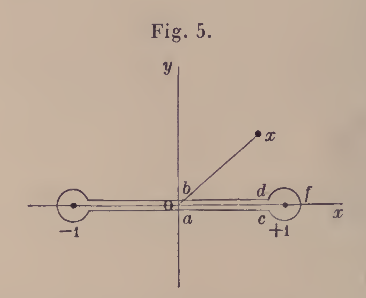
Nous allons étudier directement la fonction $\arcsin x$ définie par l'équation

$$(3) \qquad \arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

le radical étant censé égal à $+1$ quand x est égal à sa limite inférieure. Voyons d'abord combien de valeurs cette fonction peut prendre pour chaque valeur de x : tous les chemins qui conduisent de O en x peuvent se ramener à des lacets suivis du chemin rectiligne Ox. Soit u la valeur de l'intégrale prise le long de ce chemin rectiligne : la fonction placée sous le signe $\int$ a deux points critiques -1 et $+1$, qui donnent lieu à deux lacets (p. 137).

Considérons l'un d'eux $bdfca$ (*fig.* 5), le radical étant censé pris avec la valeur $+1$ pour la valeur initiale $x=0$;

Fig. 5.



l'intégrale prise le long du bord bd sera

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale prise le long du cercle est nulle; l'intégrale relative au bord ca est égale à

$$\int_1^0 \frac{dx}{-\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

En effet, quand la variable z a tourné le long du cercle dfc,

le radical a pris en c un signe contraire à celui qu'il possédait en d, et c'est $\frac{dx}{-\sqrt{1-x^2}}$ qu'il faut intégrer le long de ca. L'intégrale relative au lacet $+1$ est donc π. On verrait de même que l'intégrale relative au lacet -1 est $-\pi$.

Maintenant supposons que la variable z, après avoir décrit le lacet $+1$, décrive encore ce lacet : le radical prend à la sortie du lacet une valeur égale et de signe contraire à celle qu'il avait à son entrée; si z décrit alors une seconde fois ce lacet, l'intégrale croîtra non pas de π, mais de $-\pi$, ce qui donnera o pour sa valeur totale, après avoir décrit deux fois le lacet; si l'on décrivait une troisième fois le lacet, on trouverait de nouveau π pour valeur de l'intégrale, et la valeur du radical à la sortie serait -1, et ainsi de suite.

Si z, après avoir décrit le lacet $+1$, décrit le lacet -1, l'intégrale prendra la valeur $\pi-(-\pi)$ ou 2π, et le radical reprend à l'origine la valeur $+1$.

D'une manière générale, appelons A, B, C, ... les valeurs de l'intégrale prise le long de l'un des deux lacets, et supposons que, après avoir parcouru plusieurs fois dans un ordre quelconque les lacets, la variable z décrive le contour rectiligne Ox, l'intégrale prendra la valeur générale

$$A-B+C-D\ldots\pm F\mp u$$

le signe $+$ ou $-$ étant mis devant u, suivant que le nombre des intégrales A, B, C, ... est pair ou impair.

On peut toujours supposer que $A \gtrless B$, $B \gtrless C$, $C \gtrless D$, ..., car il serait inutile d'écrire des termes qui se détruisent; or $A=-B=C=\ldots=\pm\pi$: donc la valeur générale de l'intégrale que nous avons appelée $\arcsin x$ est

$$2n\pi+u \quad \text{ou} \quad (2n+1)\pi-u,$$

n désignant un entier. La fonction inverse de $\arcsin x$ ou $\sin u$ jouira donc des propriétés suivantes :

$$\sin(2n\pi+u)=\sin u,$$
$$\sin(2n\pi+\pi-u)=\sin u.$$

Il est facile de voir d'ailleurs que la fonction $\sin u = x$, définie par l'équation

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{1 - x^2} \tag{4}$$

[équivalente à (3) si l'on ajoute que, pour $u = 0$, on a $x = 0$] est monodrome. Il ne pourrait y avoir d'exception à cette règle que si x se trouvait dans le voisinage des points -1 et $+1$ (p. 127); mais, si l'on pose $x = 1 - \xi^2$, on a

$$\frac{2\xi\, d\xi}{du} = \sqrt{2\xi^2 - \xi^4}$$

ou

$$\frac{d\xi}{du} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \xi^2},$$

pour $x = 1$, $\xi = 0$. Or ξ est monodrome autour du point pour lequel on a $\xi = 0$; donc x est aussi monodrome autour du point pour lequel $x = 1$; on verrait de même que x ne cesse pas d'être monodrome autour du point -1 ; ainsi l'équation (3) définit $\sin x$ comme fonction de u monodrome dans toute l'étendue du plan.

IX. — Formule fondamentale de la Trigonométrie.

La formule fondamentale de la Trigonométrie rectiligne peut se déduire du Calcul intégral. Ainsi, en posant

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x$$

et en adoptant cette formule comme définition de $\arcsin x$, on aura, pour intégrale de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 0, \tag{1}$$

l'équation

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin c, \tag{2}$$

où c désigne une constante. Mais on peut intégrer autrement la formule (1) et l'écrire

$$dx\sqrt{1-y^2}+dy\sqrt{1-x^2}=0$$

ou

$$\int dx\sqrt{1-y^2}+\int dy\sqrt{1-x^2}=a,$$

a désignant une nouvelle constante; en intégrant par parties, on a

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}-\int xy\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right)=a$$

ou, en vertu de (1),

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=a;$$

(2) montre que, pour $x=0$, $y=c$; si l'on fait ici $x=0$, on a $y=a$: donc $a=c$, et par suite

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=c. \tag{3}$$

En appelant alors $\sin x$ la fonction inverse de $\arcsin x$ et en posant $\arcsin x=a$, $\arcsin y=b$,

$$a+b=\arcsin c;$$

on a, au lieu de (3),

$$\sin a\sqrt{1-\sin^2 b}+\sin b\sqrt{1-\sin^2 a}=\sin(a+b).$$

Les signes des radicaux se vérifient en faisant successivement $a=0$, $b=0$. C'est la formule fondamentale de la Trigonométrie.

X. — Intégrales des fonctions algébriques de genre zéro.

On a vu que les fonctions algébriques pouvaient se classer par *genres* (p. 82). Les fonctions de genre zéro sont définies par des équations algébriques représentant des courbes unicursales, et l'on sait que, si y est fonction algébrique de x de

genre zéro, on peut exprimer x et y en fonction rationnelle d'un même paramètre t. L'intégrale

$$\int y\,dx$$

ou même cette autre

$$U = \int F(x, y)\,dx,$$

dans laquelle F désigne une fonction rationnelle, peut toujours être calculée au moyen des signes ordinaires de l'Algèbre, y compris le signe log, c'est-à-dire en termes finis; en effet, si l'on remplace x et y par les fonctions rationnelles $\varphi(t)$ et $\psi(t)$, on trouve

$$U = \int F(\varphi, \psi)\varphi'(t)\,dt,$$

la quantité placée sous le signe $\int$ étant rationnelle en t; on en conclut que :

Théorème. — *Les fonctions rationnelles de x et d'une fonction de genre zéro peuvent toujours s'intégrer en termes finis.*

XI. — Intégrales des fonctions algébriques de genre 1.

Les intégrales des fonctions algébriques de genre zéro n'engendrent pas de transcendantes nouvelles; elles peuvent s'exprimer au moyen des fonctions algébriques et logarithmiques. Il n'en est pas de même des intégrales des fonctions de genre un et *a fortiori* des intégrales des fonctions de genre supérieur, comme nous ne tarderons pas à le démontrer.

Les intégrales des fonctions de genre 1 méritent d'être étudiées à part : on leur a donné le nom d'intégrales *elliptiques*. Si y désigne une fonction de x de genre 1, x et y pourront s'exprimer, comme l'on a vu (p. 88), en fonction rationnelle d'un paramètre t et d'un radical R de la forme

$$R = \sqrt{at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e},$$

a, b, c, d, e désignant des constantes, en sorte que, si $F(x, y)$ désigne une fonction rationnelle de x et de y, l'intégrale elliptique

$$U = \int F(x, y)\, dx$$

pourra se ramener à la forme

$$U = \int \psi(t, R)\, dt,$$

$\psi(t, R)$ désignant une fonction rationnelle de t et de R.

XII. — Sur l'impossibilité d'exprimer les fonctions abéliennes au moyen des signes ordinaires de l'Algèbre.

Les théories que nous allons exposer sont dues à Liouville (*Journal de Crelle,* t. 12 et 13; Académie des Sciences de Paris, 24 juin 1837).

Liouville appelle *transcendantes* de première espèce les fonctions algébriques de e^{u_1}, e^{u_2}, ..., $\log u_1$, $\log u_2$, ..., u_1, u_2, ..., les lettres u_1, u_2, ... désignant des fonctions algébriques. On appelle *transcendantes* de seconde espèce les fonctions algébriques de $e^{v_1}, e^{v_2}, \ldots, \log v_1, \log v_2, \ldots, v_1, \ldots,$ les lettres $v_1, v_2, \ldots$ désignant des transcendantes de première espèce, etc.

Ceci posé, nous allons chercher la condition pour que l'intégrale abélienne $\int y\, dx$, où y est une fonction algébrique, soit exprimable par le moyen des fonctions algébriques exponentielles ou logarithmiques.

Supposons d'abord $\int y\, dx$ exprimable en fonction algébrique de fonctions de première espèce, et soit

$$(1) \qquad \int y\, dx = f(x, e^{u_1}, e^{u_2}, \ldots, \log u_1, \log u_2, \ldots).$$

Rien n'empêche de supposer qu'entre e^{u_1}, e^{u_2}, ..., $\log u_1$

$\log u_2$, ... il n'existe pas de relation algébrique, sans quoi, s'il en existait une, on pourrait remplacer $\log u_1$, par exemple, par sa valeur au moyen des autres transcendantes.

Je dis que la fonction e^{u_1} ne saurait figurer dans le second membre de (1); en effet, remplaçant f par $\varphi(e^{u_1}, x)$ ou même par $\varphi(\theta, x)$ en posant $e^{u_1} = \theta$, on aura

$$\int y\,dx = \varphi(\theta, x)$$

et, en différentiant,

$$y = \varphi_1(\theta, x)\theta\frac{du_1}{dx} + \varphi_2(\theta, x), \tag{2}$$

où nous désignons, pour abréger, par φ_1 et φ_2 les dérivées $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$; mais cette formule (2) ne saurait avoir lieu, puisque elle établirait une relation algébrique entre nos transcendantes, ce qui est contraire à notre hypothèse, à moins que les exponentielles qui y figurent dans les signes fonctionnels ne disparaissent identiquement. Si ces exponentielles disparaissent, on peut remplacer θ par $\mu\theta$ ou même par une quantité quelconque, sans troubler l'égalité (2), et l'on a alors

$$(3)\; y = \varphi_1(\theta, x)\theta\frac{du_1}{dx} + \varphi_2(\theta, x) = \varphi_1(\mu\theta, x)\mu\theta\frac{du_1}{dx} + \varphi_2(\mu\theta, x);$$

d'où l'on conclut, en intégrant,

$$\varphi(\theta, x) = \varphi(\mu\theta, x) + \text{const.};$$

la constante dépendra en général de μ, et l'on aura

$$\varphi(\theta, x) = \varphi(\mu\theta, x) + \psi(\mu). \tag{4}$$

Il ne faut pas oublier que (3) est une identité; (4) doit donc aussi être identique et avoir lieu quel que soit θ; on peut alors supposer $\theta = 1$: on a alors

$$\varphi(1, x) = \varphi(\mu, x) + \psi(\mu),$$

ce qui détermine $\psi(\mu)$; (4) devient alors

$$\varphi(\theta, x) - \varphi(1, x) = \varphi(\mu\theta, x) - \varphi(\mu, x).$$

Si l'on différentie successivement par rapport à θ et μ, on a

$$\varphi_1(\theta, x) = \mu\varphi_1(\theta\mu, x),$$
$$\theta\varphi_1(\mu\theta, x) = \varphi_1(\mu, x);$$

d'où l'on tire, en éliminant $\varphi_1(\theta\mu, x)$,

$$\mu\varphi_1(\mu, x) = \theta\varphi_1(\theta, x) = \text{const.} = a.$$

Ainsi

$$\varphi_1(\theta, x) = \frac{a}{\theta},$$

et, en intégrant,

$$\varphi(\theta, x) = a\log\theta + b,$$

b désignant une nouvelle constante; on a donc

$$\varphi(\theta, x) = a\log e^{u_1} + b = au_1 + b;$$

la fonction φ ne contient donc pas d'exponentielles; donc :

Une intégrale abélienne ne peut pas contenir d'exponentielles dans son expression, si elle est transcendante de première espèce.

Supposons maintenant que $\theta = \log u_1$, et, explicitant cette fonction, posons

$$(1) \qquad \int y\,dx = \varphi(\theta, x),$$

$$\varphi_1(\theta, x) = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}, \qquad \varphi_2(\theta, x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

En différentiant (1), on a

$$y = \varphi_1(\theta, x)\frac{u'_1}{u_1} + \varphi_2(\theta, x);$$

le second membre de cette formule doit être indépendant de θ : on peut donc y remplacer θ par $\theta + \mu$ et l'on a identiquement

$$\varphi_1(\theta + \mu, x)\frac{u'_1}{u_1} + \varphi_2(\theta + \mu, x) = \varphi_1(\theta, x)\frac{u'_1}{u_1} + \varphi_2(\theta, x).$$

En intégrant, on a alors

$$\varphi(\theta+\mu, x)=\varphi(\theta, x)+\psi(\mu),$$

$\psi(\mu)$ désignant une constante par rapport à x; si l'on fait $\theta=0$, il vient

$$\varphi(\mu, x)=\varphi(0, x)+\psi(\mu),$$

d'où, par soustraction,

$$\varphi(\theta+\mu, x)-\varphi(\mu, x)=\varphi(\theta, x)-\varphi(0, x).$$

Si l'on différentie alors successivement par rapport à μ et θ, on a

$$\varphi_1(\theta+\mu, x)-\varphi_1(\mu, x)=0,$$
$$\varphi_1(\theta+\mu, x)-\varphi_1(\theta, x)=0;$$

donc

(2) $$\varphi_1(\mu, x)=\varphi_1(\theta, x)=\text{const.}=a,$$

d'où

$$\varphi(\theta, x)=a\theta+b,$$

a et b désignant des constantes d'intégration, c'est-à-dire des quantités indépendantes de θ, mais pouvant dépendre de x. On a donc

(3) $$\varphi(\theta, x)=\int y\,dx=a\log u_1+b.$$

Mais on peut aller plus loin et prouver que a est constant.

En effet, en vertu de (2), on peut poser

$$\varphi_1(\theta+\mu, x)=a,$$

μ désignant une constante; on a donc

$$\varphi(\theta+\mu, x)=a\theta+b_1.$$

Changeant θ en $\theta-\mu$, on aura

$$\varphi(\theta, x)=\int y\,dx=a(\theta-\mu)+b_1;$$

or les valeurs de $\int y\,dx$ données par cette formule et par (3) ne peuvent différer que par une constante ; donc

$$a\theta + b - a(\theta - \mu) - b_1 = \text{const.};$$

donc $a\mu + b - b_1$ doit être constant quel que soit μ, et, en particulier, en supposant μ constant,

$$\mu \frac{da}{dx} + \frac{d(b - b_1)}{dx} = 0,$$

quel que soit μ ; par suite $\frac{da}{dx} = 0$ et $\frac{d(b-b_1)}{dx} = 0$; donc a est bien un nombre constant. Donc :

Théorème. — *Si l'intégrale $\int y\,dx$ est une transcendante de première espèce, on a forcément*

$$\int y\,dx = u_0 + A_1 \log u_1 + A_2 \log u_2 + \ldots,$$

u_0, u_1, u_2, ... désignant des fonctions algébriques A_1, A_2, ... des constantes.

Ce premier théorème est de Liouville.

Maintenant supposons l'intégrale $\int y\,dx$ exprimable au moyen d'une transcendante de seconde espèce, on pourra poser

$$\int y\,dx = \varphi(e^{u_1}, e^{u_2}, \ldots, \log u_1, \log u_2, \ldots),$$

φ désignant une fonction algébrique de fonctions de première espèce et de e^{u_1}, e^{u_2}, ..., $\log u_1$, $\log u_2$, ..., et u_1, u_2, ... les u désignant non plus des fonctions algébriques, mais des transcendantes de première espèce.

On prouvera, comme tout à l'heure, que e^{u_1}, e^{u_2}, ... ne peuvent pas figurer dans l'expression de $\int y\,dx$ et que $\log u_1$, $\log u_2$, ... n'y entrent que sous forme linéaire avec des coefficients constants, en sorte que

$$\int y\,dx = u_0 + A_1 \log u_1 + A_2 \log u_2 + \ldots,$$

u_0, u_1, u_2, ... désignant des transcendantes de première espèce. Or Liouville trouve encore que u_0, u_1, ..., u_n sont simplement algébriques ; la démonstration se fait en posant

$$\int y\,dx = \varphi(e^v, x) = \varphi(\theta, x),$$

v désignant l'une des fonctions algébriques qui figurent dans u_0, u_1, u_2, ... : en employant le même mode de démonstration que tout à l'heure, qui réussit grâce à ce que les dérivées de φ sont algébriques par rapport à u_1, u_2, ..., on prouve que e^v ne doit pas figurer dans u_1, u_2, ... ; on voit de même, en posant

$$\int y\,dx = \varphi(\log v, x) = \varphi(\theta, x),$$

que θ ne peut entrer dans $\int y\,dx$.

Le même raisonnement s'appliquerait au cas où $\int y\,dx$ serait supposée transcendante de troisième espèce, et ainsi de suite ; donc enfin :

Théorème II. — *Si une intégrale abélienne est exprimable à l'aide des signes de l'Algèbre ordinaire en y adjoignant les signes logarithmiques ou trigonométriques, elle est nécessairement de la forme*

$$\text{(H)} \qquad \int y\,dx = u_0 + A_1 \log u_1 + A_2 \log u_2 + \ldots,$$

u_0, u_1, u_2, ... *désignant des fonctions algébriques et* A_1, A_2, ... *des constantes.*

Abel a prouvé que u_0, u_1, ..., u_n étaient des fonctions rationnelles de x et de y. Pour le voir, il suffit d'exprimer u_0, u_1, ... en fonction rationnelle d'une même fonction algébrique λ. Cette fonction λ satisfera à une équation irréductible à coefficients entiers en x ; mais il est clair que l'on pourra d'une infinité de manières s'arranger de telle sorte que

ses coefficients contiennent y. Rien n'empêche de supposer cette équation $\Lambda = 0$ irréductible en λ; or, si l'on différentie l'équation (H), on obtient une relation rationnelle en x, y, λ, qui peut servir à définir λ. Or, l'équation considérée $\Lambda = 0$ étant irréductible, la relation rationnelle en question doit admettre toutes les racines de $\Lambda = 0$ pour une même valeur de x et de y; en faisant alors dans (H) λ égal à chacune des racines de $\Lambda = 0$ et en ajoutant les résultats censés au nombre de μ, on a

$$\mu \int y\,dx = \Sigma u_0 + A_1 \log \Pi u_1 + A_2 \log \Pi u_2 + \ldots;$$

mais Σu_0, Πu_1, Πu_2, ... sont des fonctions symétriques des racines de $\Lambda = 0$: ils s'exprimeront donc en fonction rationnelle de x et de y. C. Q. F. D.

XIII. — Impossibilité d'exprimer les intégrales elliptiques à l'aide de transcendantes plus simples.

Nous avons vu que les intégrales elliptiques, ou intégrales des fonctions du premier genre, se ramenaient à la forme

$$(1) \qquad \int f(R, x)\,dx,$$

R désignant la racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré et f une fraction rationnelle. Or toute fonction rationnelle de R et x peut se mettre sous la forme

$$\frac{A + BR}{C + DR} = \frac{(A + BR)(C - DR)}{C^2 - D^2 R^2},$$

A, B, C, D désignant des fonctions entières, et par suite sous la forme

$$\frac{P + QR}{S} = \frac{P}{S} + \frac{QR^2}{RS} = \frac{P}{S} + \frac{T}{RS},$$

P, Q, S, T désignant encore des fonctions entières; l'intégrale (1) se ramène donc à la forme

$$\int \frac{P}{S}\,dx + \int \frac{T}{RS}\,dx.$$

La première intégrale s'obtient facilement, la seconde se décompose en d'autres de la forme

$$\int \frac{x^m\,dx}{R}, \quad \int \frac{dx}{(x-\alpha)^m R},$$

abstraction faite de facteurs constants, en décomposant la fraction $\frac{T}{S}$ en éléments simples.

Je vais prouver que l'intégrale la plus simple,

$$\int_0^x \frac{dx}{R},$$

ne peut être exprimée au moyen des fonctions algébriques logarithmiques, etc. En effet, si une pareille expression était possible, on aurait, en vertu du théorème d'Abel démontré au paragraphe précédent,

$$(1) \qquad \int_0^x \frac{dx}{R} = P_0 + Q_0 R + \sum A_i \log(P_i + Q_i R),$$

P_i et Q_i désignant des fonctions rationnelles, que l'on peut, sans nuire à la généralité, supposer entières si $i > 0$ et A_i désignant une constante; mais je dis que l'on doit aussi supposer P_0 et Q_0 entiers. En effet, supposons P_0 ou Q_0 infinis pour $x = \alpha$, $P_0 + Q_0 R$ sera infini, mais $\int_0^x \frac{dx}{R}$ est nécessairement fini, quand même R^2 contiendrait le facteur $x - \alpha$, car il ne saurait le contenir deux fois (sans quoi R se ramènerait à la forme $(x-\alpha)R'$, R' désignant un radical portant sur un polynôme du deuxième degré); donc il faudrait que l'une des quantités $P_i + Q_i R$ fût nulle pour $x = \alpha$, mais $P_0 + Q_0 R$ pour des valeurs de x voisines de α ne saurait être de même ordre infinitésimal que $\log(P_i + Q_i R)$ qui est de

l'ordre de $\log(x-\alpha)$; donc P_0 et Q_0, ne devenant pas infinis, sont nécessairement entiers.

On peut supposer que l'intégrale qui figure dans (1) ait été prise le long d'un contour rectiligne; alors, si l'on intègre d'abord autour d'un lacet relatif à $\frac{1}{R}$, la formule (1) devra être remplacée par la suivante, où θ désigne une constante,

$$\theta - \int_0^x \frac{dx}{R} = P_0 - Q_0 R + \sum A_i \log(P_i - Q_i R),$$

et, en la combinant avec (1), on a

$$\theta = 2P_0 + \sum A_i \log(P_i^2 - Q_i^2 R^2),$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\theta = 2P_0 + \sum m \log(x-a),$$

m et a désignant des constantes. Cette formule est impossible si les termes logarithmiques qui deviennent infinis dans le second membre ne sont pas nuls, et alors P_0 est constant; on a donc

$$\int_0^x \frac{dx}{R} = P_0 + Q_0 R,$$

P_0 désignant une constante; différentions, nous aurons

$$\frac{1}{R} = Q_0 \frac{dR}{dx} + R \frac{dQ_0}{dx}$$

ou

$$1 = Q_0 R \frac{dR}{dx} + R^2 \frac{dQ_0}{dx}$$

ou

$$2 = Q_0 \frac{dR^2}{dx} + 2R^2 \frac{dQ_0}{dx}.$$

Soit

$$R^2 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$
$$Q_0 = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Gx + H,$$

on devra avoir

$$\begin{aligned} 2 = &(\mathrm{A}x^m + \ldots + \mathrm{H})(4ax^3 + \ldots + d) \\ &+ 2(ax^4 + \ldots + e)(m\mathrm{A}x^{m-1} + \ldots + \mathrm{G}) \end{aligned}$$

ou, en identifiant,

$$2 = \mathrm{H}d + 2e\mathrm{G}, \qquad 0 = 4\mathrm{A}a + 2m\mathrm{A}a.$$

m devrait être égal à -2, ce qui est absurde; ainsi, parmi les intégrales elliptiques auxquelles donnent lieu les fonctions algébriques de genre un, les plus simples, celles qui sont de la forme

$$\int \frac{dx}{\mathrm{R}},$$

sont des transcendantes nouvelles. Le Chapitre suivant sera consacré à l'étude de ces transcendantes et de leurs inverses.

Nous croyons devoir placer dans ce Chapitre un théorème général dû à Abel et dont nous ferons un fréquent usage.

XIV. — Théorème d'Abel.

Dans une Note très succincte, Abel indique la possibilité de former des combinaisons linéaires d'intégrales de fonctions algébriques, exprimables au moyen des signes de l'Algèbre élémentaire. Au fond, le théorème d'Abel revient au suivant :

Soit

(1) $$f(x, y) = 0$$

une courbe algébrique, réductible ou irréductible, de degré m; si l'on coupe cette courbe par une courbe algébrique de degré n à coefficients variables,

(2) $$\psi(x, y) = 0,$$

et si l'on appelle (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_i, y_i), ... les $\mu = mn$ points d'intersection de ces deux courbes, on aura la relation

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} \frac{\mathrm{F}(x_i, y_i)\,dx_i}{f_2(x_i, y_i)} = 0,$$

$F(x, y)$ *désignant une fonction entière quelconque de degré au plus égal à* $m-3$, *et* $f_2(x, y)$ *désignant la dérivée* $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Pour démontrer ce théorème, nous observerons que x_1, y_1, x_2, y_2, ... sont fonctions des paramètres contenus dans les coefficients variables de ψ, ou, si l'on veut, de ces coefficients; si alors on fait varier ces coefficients et si l'on appelle $d\psi$ la différentielle de ψ relative à ces coefficients, x et y restant constants, on aura, pour des valeurs quelconques de x et y satisfaisant à (1) et (2),

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}\,dy + d\psi = 0,$$

ou bien, en éliminant dy,

$$\frac{\partial(f, \psi)}{\partial(x, y)}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,d\psi = 0$$

ou, en remplaçant $\frac{\partial f}{\partial y}$ par $f_2(x, y)$,

$$\frac{F(x, y)\,dx}{f_2(x, y)} + \frac{d\psi\,F(x, y)}{\left[\frac{\partial(f, \psi)}{\partial(x, y)}\right]} = 0.$$

Si, dans cette formule, nous faisons successivement $x = x_1$, x_2, ..., x_μ et si nous ajoutons les résultats, nous aurons, en vertu d'un théorème démontré (p. 322, t. I), en observant que $F(x, y)\,d\psi$ est de degré inférieur à $\frac{\partial(f, \psi)}{\partial(x, y)}$,

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} \frac{F(x_i, y_i)\,dx_i}{f_2(x_i, y_i)} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

XV. — Application du théorème d'Abel à un système hyperelliptique.

Soit X un polynôme du degré $2p$ donné par la formule

$$X = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2p} x^{2p}$$

et X_i ce que devient ce polynôme quand on y fait $x = x_i$; considérons la courbe

$$(1) \qquad y^2 = X,$$

et coupons-la par une courbe variable de degré p

$$(2) \qquad y = U,$$

dans laquelle U désignera un polynôme entier de degré p; les deux courbes se couperont en $2p$ points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots,$ dont les abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_{2p}$ seront racines de

$$(3) \qquad U^2 - X = 0.$$

Nous supposerons fixes les p intersections $(x_{p+1}, y_{p+1}), \ldots,$ (x_{2p}, y_{2p}); il suffit pour cela de déterminer p des $p+1$ coefficients de U par les p formules

$$(4) \qquad y_{p+1} = U_{p+1}, \qquad y_{p+2} = U_{p+2}, \qquad \ldots, \qquad y_{2p} = U_{2p}.$$

Alors, entre les p points $(x_1, y_1), \ldots, (x_p, x_p)$ restés variables, il existera, en vertu du théorème d'Abel, des relations de la forme

$$\sum_{i=1}^{i=p} \frac{F(x_i, y_i)\, dx_i}{y_i} = 0$$

ou

$$\sum_{i=1}^{i=p} \frac{F(x_i, \sqrt{X_i})}{\sqrt{X_i}}\, dx_i = 0,$$

F désignant un polynôme de degré $2p-3$ en x et y arbitraire. En particulier, on aura

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \dfrac{dx_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \dfrac{dx_p}{\sqrt{X_p}} = 0, \\ \dfrac{x_1\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \dfrac{x_2\,dx_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \dfrac{x_p\,dx_p}{\sqrt{X_p}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{x_1^{p-2}\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \dfrac{x_2^{p-2}\,dx_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \dfrac{x_p^{p-2}\,dx_p}{\sqrt{X_p}} = 0. \end{array}\right.$$

Si maintenant on considère ce système, il sera satisfait en prenant pour $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les points d'intersection variables de (1) et (2), en sorte que pour intégrer le système (1) on formera l'équation (3)

$$U^2 - X = 0;$$

on divisera son premier membre par $(x - x_{p+1}), \ldots, (x - x_{2p})$; $x_{p+1}, \ldots, x_{2p}$ étant connus, l'équation résultante

$$R = 0$$

fournira alors $x_1, x_2, \ldots, x_p$, et, si l'on a

$$R = A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_p,$$

on en conclura

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{r} x_1 + x_2 + \ldots + x_p = -\dfrac{A_1}{A_0}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_p x_{p+1} = \dfrac{A_2}{A_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_1x_2\ldots x_p = \pm\dfrac{A_p}{A_0}. \end{array}\right.$$

En éliminant entre ces équations le paramètre variable qui reste dans U, on aura $p-1$ relations entre $x_1, x_2, \ldots, x_p$, qui seront les intégrales de (5) renfermant les constantes x_{p+1}, $x_{p+2}, \ldots, x_{2p}$ qui se réduisent à $p-1$.

On pourrait encore trouver sous forme algébrique les inté-

grales de (5) en développant l'équation $U^2 - X = 0$ sous la forme

$$P_0 x^{2p} + P_1 x^{2p-1} + \ldots + P_{2p} = 0,$$

sans exprimer que U prend des valeurs données pour

$$x = x_{p+1}, \ldots, x_{2p}.$$

Alors on aurait

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_{2p} &= -\frac{P_1}{P_0}, \\ x_1 x_2 + \ldots + x_{2p-1} x_{2p} &= \quad \frac{P_2}{P_0}, \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots, \\ x_1 x_2 x_3 \ldots x_{2p} &= \quad \frac{P_{2p}}{P_0}. \end{aligned}$$

En éliminant ensuite x_p, x_{p+1}, ..., x_{2p} et un coefficient de U, on aurait encore $p - 1$ relations entre x_1, x_2, ..., x_p et les coefficients de U qui seraient dans ce cas les constantes d'intégration.

Il résulte de là un fait curieux dont toute l'importance sera développée plus loin : les équations (5) ont pour intégrales, sous forme transcendante, les relations évidentes

$$\sum \int \frac{dx_i}{\sqrt{X_i}} = \text{const.}, \qquad \sum \int \frac{x_i\, dx_i}{\sqrt{X_i}} = \text{const.}, \qquad \ldots,$$

et ces équations sont équivalentes à des équations algébriques qui sont les intégrales déduites des considérations qui précèdent.

XVI. — Généralisation du théorème d'Abel.

Le théorème d'Abel peut être généralisé comme il suit :

Soient

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots, \\ f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned} \right.$$

$n-1$ *équations algébriques de degré* m; *si nous leur adjoignons l'équation à coefficients variables de degré* p

$$(2)\qquad f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

et si nous désignons par

$$x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$$

l'une quelconque des $\mu = pm^{n-1}$ *solutions de* (1), (2), *nous aurons*

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} \frac{F(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})\, dx_{i1}}{\left[\dfrac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{\partial(x_{i2}, x_{i3}, \ldots, x_{in})}\right]} = 0,$$

F *désignant un polynôme quelconque de degré* $m-3$.

La démonstration de ce théorème se fait comme celle du théorème précédent. On différentie les équations (1) et (2) par rapport aux coefficients de f_n, et l'on a

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\, dx_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}\, dx_n = 0,$$
$$\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\, dx_n + df_n = 0$$

et, en éliminant $dx_2, dx_3, \ldots, dx_n$,

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\, dx_1 + \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{\partial(x_2, x_3, \ldots, x_n)}\, df_n = 0;$$

multiplions par $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et divisons par

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\, \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{\partial(x_2, x_3, \ldots, x_n)},$$

remplaçons ensuite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ successivement par x_{11}, $x_{12}, \ldots, x_{1n}$; ... $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$, ... et ajoutons les

résultats ainsi obtenus : nous aurons, en vertu du théorème (t. I, p. 322), la formule

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} \frac{F(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})\, dx_{i1}}{\left[\dfrac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{\partial(x_{i2}, x_{i3}, \ldots, x_{in})}\right]} = 0,$$

qu'il fallait démontrer.

Nous aurons plus tard l'occasion de faire des applications de ce théorème qui donne toute la théorie des biquadratiques gauches.

CHAPITRE VI.

THÉORIE DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES.

I. — Préliminaires.

On a donné le nom d'*intégrales elliptiques*, comme nous l'avons dit, aux intégrales de la forme

$$\int F(x, \sqrt{X})\,dx,$$

F désignant une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{X}$, et X un polynôme du troisième ou du quatrième degré ; c'est à cette forme que se ramènent les intégrales des fonctions algébriques de genre un.

C'est le comte Fagnano qui a attiré l'attention des géomètres sur ces nouvelles transcendantes par ses travaux sur la comparaison des arcs d'ellipse et de lemniscate. Euler a ensuite intégré l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}} = \frac{dy}{\sqrt{Ay^4+By^3+Cy^2+Dy+E}}$$

sous forme algébrique, et a ainsi fait faire le premier pas à la théorie des fonctions elliptiques (*Novi commentarii Petrop.*, t. VI et VII). Lagrange (*Mém. de Turin,* t. IV, et *Fonctions analytiques*) a donné une méthode plus simple et plus naturelle pour résoudre la même question ; il a donné aussi une méthode pour transformer les unes dans les autres les intégrales elliptiques, en s'appuyant sur une découverte de Lauden, dont nous aurons l'occasion de nous occuper bientôt.

En 1811, Legendre a fait paraître un Traité volumineux, enrichi de Tables numériques, et qui contient tout ce qui avait été écrit jusque-là sur ce sujet; mais c'est à Jacobi et à Abel que nous devons la connaissance de la nature intime des fonctions elliptiques. Ces éminents géomètres ont eu l'idée d'étudier non plus les intégrales elliptiques, mais les fonctions inverses de ces intégrales, et ont été ainsi les véritables fondateurs de la théorie des fonctions elliptiques. On comprendra facilement l'importance du point de vue auquel se plaçaient Abel et Jacobi, si l'on réfléchit que les intégrales des fonctions de x et de $\sqrt{ax^2+bx+c}$ donnent naissance aux fonctions circulaires inverses de celles que l'on considère en Trigonométrie, et qui sont bien plus importantes.

Il serait injuste de ne pas mentionner ici Cauchy et Puiseux, le premier pour nous avoir révélé l'origine des périodes, et le second pour nous avoir fait connaître la manière dont se permutent les racines des équations algébriques les plus générales et les diverses valeurs que peuvent prendre leurs intégrales. Il serait également injuste de ne pas mentionner les admirables travaux de MM. Hermite, Liouville, Weierstrass, etc., qui ont éclairé d'une lumière si vive une théorie restée peut-être un peu obscure dans les Œuvres d'Abel et de Jacobi.

(Voir, *Bulletin des Sc. math.*, 2e série, t. III, décembre 1879, p. 489, un résumé historique de la *Théorie des Fonctions elliptiques*, par Kœnigsberger.)

II. — Réduction des intégrales elliptiques à des types simples.

Soit $F(x, \sqrt{X})$ une fonction rationnelle de x et du radical $\sqrt{X}$; on peut mettre F sous la forme

$$F = \frac{A + B\sqrt{X}}{C + D\sqrt{X}},$$

A, B, C, D désignant des polynômes entiers en x; si alors on

multiplie haut et bas par $C - D\sqrt{X}$, on a

$$F = \frac{P + Q\sqrt{X}}{C^2 - D^2 X},$$

P, Q désignant de nouvelles fonctions entières; F se décompose alors en deux parties, l'une rationnelle que l'on sait intégrer, et l'autre de la forme

$$H\sqrt{X} = \frac{HX}{\sqrt{X}},$$

H désignant une fonction rationnelle, ou $\frac{G}{\sqrt{X}}$, G désignant une nouvelle fonction rationnelle.

Nous n'aurons donc besoin que d'étudier les intégrales elliptiques de la forme

$$\int \frac{G\,dx}{\sqrt{X}}.$$

Et d'ailleurs rien ne suppose jusqu'à présent que le polynôme X soit du troisième ou du quatrième degré, de sorte que la réduction que nous venons de faire s'appliquerait encore aux intégrales dites *ultra-elliptiques*, dans lesquelles X est d'un degré supérieur à quatre.

III. — Problème de la transformation.

Jacobi a donné le nom de *problème de la transformation* au suivant :

Étant donnée une expression de la forme

$$\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

où X désigne un polynôme entier du quatrième degré en x, la changer en une autre de la forme

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

Y *désignant un polynôme entier du quatrième degré en* y, *au moyen d'un changement de variable de la forme*

$$x = \frac{U}{V},$$

U *et* V *désignant des polynômes entiers en* y *que l'on peut supposer premiers entre eux.*

Pour résoudre cette question, supposons

$$X = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta),$$

nous aurons

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{(U'V - V'U)\,dy}{\sqrt{(U-\alpha V)(U-\beta V)(U-\gamma V)(U-\delta V)}}.$$

Pour que le second membre de cette formule soit de la forme $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$, il est nécessaire que le polynôme placé sous le radical soit le produit d'un carré par un polynôme du quatrième degré en y; mais cela ne suffit pas, il faut encore que le carré en question soit égal, à un facteur constant près, à $U'V - V'U$. Soit p le degré des polynômes U, V; le polynôme

$$P = (U-\alpha V)(U-\beta V)(U-\gamma V)(U-\delta V)$$

sera du degré $4p$; le carré dont nous avons parlé est alors de degré $4p-4$; sa racine est de degré $2p-2$; c'est précisément le degré de $U'V - V'U$, si l'on observe que le degré de ce polynôme, en apparence $2p-1$, est en réalité $2p-2$, les termes en $2p-1$ se détruisant mutuellement.

Je dis maintenant qu'il suffit que le polynôme P se décompose en un polynôme du quatrième degré et en un carré, pour que la racine de ce carré divise $U'V - V'U$ et, par suite, soit égale, à un facteur constant près, à $U'V - V'U$, en sorte que, pour que la transformation soit possible, il suffit que P soit le produit d'un carré par un polynôme du quatrième degré.

Si P est divisible par un carré, il sera le produit de facteurs doubles, provenant d'un même binôme $U-\alpha V$, $U-\beta V$, ...;

en effet, $U - \alpha V$ et $U - \beta V$ ne sauraient avoir un facteur commun, sans quoi ce facteur diviserait leur différence $(\alpha - \beta) V$ et, par suite, V et U, qui par hypothèse sont premiers entre eux; mais, si $U - \alpha V$, par exemple, admet un facteur double, ce facteur appartiendra à $U' - \alpha V'$ ou à $U'(U - \alpha V) - U(U' - \alpha V')$, c'est-à-dire à son égal $-\alpha(U'V - V'U)$: donc la racine du carré en question sera précisément $U'V - V'U$, et il est facile de voir que notre raisonnement s'applique au cas où U et V seraient, l'un de degré p, l'autre de degré $p - 1$, parce que $U'V - V'U$ serait encore de degré $2p - 2$.

IV. — Transformation du premier degré.

Le degré de la transformation est le degré le plus élevé des polynômes U, V qui entrent dans l'expression de x en y.

Dans la transformation du premier degré, on a

$$x = \frac{a + by}{a' + b'y};$$

si l'on applique cette transformation à la différentielle

$$(1) \qquad \frac{dx}{\sqrt{A(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)}},$$

elle devient

$$\frac{(ba' - ab')\,dy}{\sqrt{A[(b - \alpha b')y + a - \alpha a'][(b - \beta b')y + a - \beta a']\ldots}};$$

la transformation du premier degré réussit donc toujours, et cela d'une infinité de manières; on peut alors profiter de l'indétermination de a, b, a', b', pour faire disparaître un certain nombre de termes dans le polynôme Y qui figure sous le radical du polynôme transformé. On fera disparaître les termes de degré impair, en posant, par exemple,

$$(b - \alpha b')(a - \beta a') + (a - \alpha a')(b - \beta b') = 0,$$
$$(b - \gamma b')(a - \delta a') + (a - \gamma a')(b - \delta b') = 0;$$

dans ces formules il n'entre que les rapports $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$; nous pouvons alors supposer $a' = 1$, $b' = 1$, et l'on a

$$x = \frac{a + by}{1 + y},$$

et les quantités a, b seront données par les formules

$$(b - \alpha)(a - \beta) + (a - \alpha)(b - \beta) = 0,$$
$$(b - \gamma)(a - \delta) + (a - \gamma)(b - \delta) = 0$$

ou bien

$$2ab - (\alpha + \beta)(a + b) + 2\alpha\beta = 0,$$
$$2ab - (\gamma + \delta)(a + b) + 2\gamma\delta = 0;$$

on en conclut

$$ab = \frac{\alpha\beta(\gamma + \delta) - \gamma\delta(\alpha + \beta)}{\alpha + \beta - \gamma - \delta};$$
$$a + b = \frac{2(\alpha\beta - \gamma\delta)}{\alpha + \beta - \gamma - \delta}.$$

a et b sont donc racines d'une équation du second degré facile à résoudre.

Remarque I. — Si $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 2s$, notre méthode tombe en défaut; mais alors la transformation devient inutile, si son but est de faire disparaître les termes en y et y^3. En effet, on a alors

$$\begin{aligned}(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) &= (x^2 - 2sx + \alpha\beta)(x^2 - 2sx + \gamma\delta) \\ &= [(x - s)^2 + \alpha\beta - s^2][(x - s)^2 + \gamma\delta - s^2],\end{aligned}$$

et, en prenant $x - s = y$ ou $x = y + s$, on a une transformation très simple permettant de ramener la différentielle (1) à la forme voulue.

Remarque II. — Supposons α, β, γ, δ réels ou imaginaires conjuguées deux à deux; il est facile de voir que la transformation que nous avons faite conduit à des valeurs

réelles de a et b. En effet, pour que l'équation qui donne ces quantités ait ses racines réelles, il faut et il suffit que

$$(\alpha\beta - \gamma\delta)^2 - [\alpha\beta(\gamma+\delta) - \gamma\delta(\alpha+\beta)](\alpha+\beta-\gamma-\delta) > 0;$$

car ab et $a+b$ sont évidemment réels, rien n'empêchant de conjuguer α avec β et γ avec δ. Si l'on développe cette formule, on trouve

$$(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta) > 0.$$

1° Supposons α, β, γ, δ réels; on peut supposer

$$\alpha > \beta > \gamma > \delta,$$

et cette formule se trouve satisfaite.

2° Supposons α et β conjugués, γ et δ réels, $\alpha-\gamma$ et $\beta-\gamma$ seront conjugués ainsi que $\alpha-\delta$, et $\beta-\delta$; le produit

$$(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)$$

sera donc positif.

3° Si α et β sont conjugués, ainsi que γ et δ, $\alpha-\gamma$ et $\beta-\delta$ seront conjugués, ainsi que $\alpha-\delta$ et $\beta-\gamma$, et le produit considéré sera positif.

Donc, on peut toujours, au moyen d'une transformation réelle du premier degré, faire disparaître de la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{X}}$ *où* X *est un polynôme à coefficients réels du quatrième degré, les termes du degré impair; du reste,* X *prend la forme* $A(1+my^2)(1+ny^2)$; A, m, n *désignant des quantités réelles.*

§ V. — Transformation du second degré.

Si les polynômes que nous avons appelés U et V sont du second degré, pour que la transformation réussisse, chacun des facteurs

$$U-\alpha V, \quad U-\beta V, \quad U-\gamma V, \quad U-\delta V$$

étant du second degré, il faut que deux d'entre eux soient des carrés parfaits ; nous poserons alors

$$U - \alpha V = \varepsilon(a + by)^2,$$
$$U - \beta V = \varepsilon'(a' + b'y)^2,$$

ε et ε' désignant $+1$ ou -1, d'où l'on tire facilement $\frac{U}{V}$. Quant à l'expression

$$\frac{V\,dU - U\,dV}{\sqrt{(U-\alpha V)(U-\beta V)}},$$

on la calcule aisément en observant que le numérateur peut s'écrire

$$\frac{1}{\beta-\alpha}[(U-\alpha V)d(U-\beta V)-(U-\beta V)d(U-\alpha V)],$$

et que l'on peut supposer $y = 0$, vu que l'expression en question est de la forme $dy \times$ const. On trouve ainsi

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}(ab'-ba')\,dy}{(\alpha-\beta)} \frac{1}{\sqrt{A(U-\gamma V)(U-\delta V)}}.$$

L'indétermination des polynômes U et V permettra de simplifier le polynôme Y placé sous le radical. Mais nous n'avons pas l'intention de pousser plus avant l'étude des transformations des divers degrés : ce que nous avons dit suffit pour l'objet que nous avons en vue ; lorsque nous aurons dans la suite besoin d'effectuer une transformation, nous mettrons simplement à profit les remarques faites par Jacobi.

§ VI. — Applications du problème de la transformation à la réduction des intégrales elliptiques.

Nous avons vu que les intégrales elliptiques se ramenaient à la forme

$$\int \frac{G\,dx}{\sqrt{X}},$$

où G désignait une fonction rationnelle de x et X un polynôme du troisième et du quatrième degré.

Si X est du quatrième degré, une transformation du premier ordre ou du second ordre ramènera, comme on l'a vu, $\frac{dx}{\sqrt{X}}$ à la forme $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$, Y désignant un polynôme du quatrième degré ne contenant pas de puissances impaires de y. Nous avons même vu que, si X avait des coefficients réels, Y avait des coefficients réels également.

Si X est du troisième degré, on peut ramener $\frac{dx}{\sqrt{X}}$ à la même forme; en effet, on peut poser

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dx}{\sqrt{A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}};$$

prenant $x - \alpha = z$, on a

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dz}{\sqrt{A z(z+\alpha-\beta)(z+\alpha-\gamma)}}$$

et, en faisant $z = y^2$,

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{2\,dy}{\sqrt{A(y^2+\alpha-\beta)(y^2+\alpha-\gamma)}}.$$

Le polynôme placé sous le nouveau radical est bien bicarré et de plus réel si α est réel et β, γ réels, ou conjugués.

Toute intégrale elliptique se ramène donc à des intégrales de la forme

$$\int \frac{G\,dx}{\sqrt{X}},$$

où X est un polynôme du quatrième degré ne contenant pas de puissances impaires de x. On peut toujours supposer que G ne contient pas de puissances impaires de x non plus, car on a

$$G = \frac{A + Bx}{C + Dx},$$

A, B, C, D désignant des polynômes ne contenant pas de puissances impaires de x; on a, par suite,

$$G = \frac{(A + Bx)(C - Dx)}{C^2 - D^2x^2};$$

G se décomposera donc en deux termes de la forme P et Qx, P et Q désignant des fonctions rationnelles de x^2 : ainsi

$$\int \frac{G\,dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{P\,dx}{\sqrt{X}} + \int \frac{Qx\,dx}{\sqrt{X}}.$$

Or l'intégrale $\int \frac{Qx\,dx}{\sqrt{X}}$ se calculera par les procédés ordinaires du Calcul intégral en prenant x^2 pour variable, et le calcul d'une intégrale elliptique se trouve ramené à celui d'une intégrale de la forme

$$\int \frac{P\,dx}{\sqrt{X}},$$

où P désigne une fonction rationnelle de x^2, et X une fonction entière du second degré de x^2. Dans cette intégrale nous supposerons

$$X = ax^4 + bx^2 + c.$$

Elle peut, en décomposant l'expression rationnelle P en éléments simples, se ramener à une somme d'autres de la forme

$$A\int \frac{x^{2m}\,dx}{\sqrt{X}}, \qquad A\int \frac{dx}{(x^2+\alpha)^m\sqrt{X}},$$

où A, m, α sont des constantes, dont la seconde m est nécessairement un entier. Or je dis que, dans la première intégrale, on peut toujours supposer $m = 1$ ou o; en effet, on a

$$\begin{aligned} &d\left(x^{2p+1}\sqrt{ax^4+bx^2+c}\right) \\ &\quad = \left[(2p+1)x^{2p}\sqrt{ax^4+bx^2+c} + x^{2p+1}\frac{bx+2ax^3}{\sqrt{ax^4+bx^2+c}}\right]dx \end{aligned}$$

ou

$$d\left(x^{2p+1}\sqrt{ax^4+bx^2+c}\right)$$
$$= \frac{dx}{\sqrt{ax^4+bx^2+c}} \times [x^{2p+4}(2p+3)a + x^{2p+2}(2p+2)b + x^{2p}(2p+1)c];$$

en intégrant, il vient

$$\int \frac{x^{2p+4}\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{x^{2p+1}\sqrt{X}}{(2p+3)a} - \int \frac{2p+2}{2p+3}\,\frac{b}{a}\,\frac{x^{2p+2}\,dx}{\sqrt{X}}$$
$$-\int \frac{2p+1}{2p+3}\,\frac{c}{a}\,\frac{x^{2p}\,dx}{\sqrt{X}},$$

formule qui permet d'exprimer successivement

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{X}}, \quad \dots$$

en fonction de

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} \quad \text{et} \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}};$$

l'intégrale

$$\int \frac{dx}{(x^2+\alpha)^m\sqrt{X}}$$

se ramène aux intégrales précédentes et à

$$\int \frac{dx}{(x^2+\alpha)\sqrt{X}},$$

au moyen de la formule

$$d\left[x(x^2+\alpha)^p\sqrt{X}\right]$$
$$= \left[(x^2+\alpha)^p\sqrt{X} + 2x^2(x^2+\alpha)^{p-1}p\sqrt{X} + \frac{x X'(x^2+\alpha)^p}{2\sqrt{X}}\right]dx,$$

laquelle est de la forme

$$d\left[x(x^2+\alpha)^p\sqrt{X}\right] = \frac{dx}{\sqrt{X}}[A(x^2+\alpha)^{p+2} + B(x^2+\alpha)^{p+1} + C(x^2+\alpha)^p],$$

A, B, C désignant des constantes; cette formule intégrée donne le moyen de calculer

$$\int \frac{dx}{(x^2+\alpha)^m \sqrt{X}}$$

en fonction de $\int \frac{dx}{(x^2+\alpha)\sqrt{X}}$, de $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}$ et de $\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$. Au surplus

$$\int \frac{dx}{(x^2+\alpha)^m \sqrt{X}}$$

est la dérivée d'ordre $m-1$ relative à α de

$$\frac{(-1)^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)} \int \frac{dx}{(x^2+\alpha)\sqrt{X}}.$$

VII. — Forme définitive des intégrales elliptiques.

Les intégrales elliptiques sont, d'après ce que nous avons vu, réductibles à trois types

$$(1) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{dx}{(x^2+\alpha)\sqrt{X}},$$

où X désigne un polynôme du quatrième degré ne contenant pas de puissances impaires de x, ou de la forme

$$A(1+mx^2)(1+nx^2),$$

A, m, n désignant des quantités constantes (réelles, si le polynôme primitif du quatrième degré a des coefficients réels).

Si nous nous plaçons dans le cas général, A, m, n seront quelconques et, en posant $mx^2 = -z^2$, on aura

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{-dz:\sqrt{m}}{\sqrt{A}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

k désignant une quantité quelconque réelle ou imaginaire.

Les trois intégrales (1) peuvent donc être ramenées aux formes

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+\alpha)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

ces trois intégrales portent le nom d'*intégrales de première, de deuxième* et *de troisième espèce; k* est ce que l'on appelle le *module*. Legendre pose

$$x = \sin\varphi;$$

alors les intégrales précédentes prennent les formes suivantes, auxquelles nous mettrons des limites,

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(\sin^2\varphi+\alpha)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Legendre remplaçait la seconde intégrale par

$$\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

qui n'en diffère que par une intégrale de première espèce. Sous cette dernière forme, l'intégrale de seconde espèce représente l'arc d'une ellipse dont les équations sont

$$x = \sqrt{1-k^2}\cos\varphi,$$
$$y = \sin\varphi,$$

d'où est venu le nom d'*intégrales elliptiques,* donné aux expressions que nous étudions. Quant à la troisième intégrale, il la considérait surtout sous la forme

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

La quantité φ est l'*amplitude* et n est le *paramètre*. Pour

abréger l'écriture, Legendre désignait le radical $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ par $\Delta\varphi$; on a alors

$$x = \sin \operatorname{am} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

En appelant u l'intégrale de première espèce, Jacobi fait usage des notations suivantes

$$\varphi = \operatorname{am} u, \qquad x = \sin\operatorname{am} u,$$

$$\sqrt{1-x^2} = \cos\operatorname{am} u, \qquad \sqrt{1-k^2x^2} = \Delta\operatorname{am} u;$$

nous ferons usage des notations plus simples de Gudermann

$$x = \operatorname{sn} u, \qquad \sqrt{1-x^2} = \operatorname{cn} u, \qquad \sqrt{1-k^2x^2} = \operatorname{dn} u.$$

§ VIII. — Réduction du module au-dessous de l'unité.

Lorsque les intégrales elliptiques de première, de seconde ou de troisième espèce proviennent de la réduction d'une intégrale de la forme

$$\int F(x, \sqrt{X})\, dx,$$

dans laquelle X désigne un polynôme à coefficients réels, on peut toujours supposer le module k réel et inférieur à l'unité. En effet, par la transformation du premier degré, nous avons vu que la différentielle $\frac{du}{\sqrt{X}}$ se ramenait à la forme

$$(1) \qquad \frac{dx}{\sqrt{A(1+mx^2)(1+nx^2)}} = du,$$

A, m, n désignant des quantités réelles (*voir* la Remarque II, p. 166); maintenant, pour ramener cette différentielle à la forme

$$(2) \qquad \frac{M\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

où M désigne une constante, effectuons la transformation irrationnelle

$$x^2 = \frac{a + by^2}{a' + b'y^2};$$

nous aurons

$$(3)\quad du = \frac{(ba' - ab')y\,dy}{\sqrt{A(a'+b'y^2)(a+by^2)[(a'+ma)+y^2(b'+mb)][(a'+na)+y^2(b'+nb)]}}$$

Pour que du affecte alors la forme (2), il suffit que l'un des facteurs placés sous le radical devienne égal à y^2, et qu'un autre facteur se réduise à une constante; les facteurs restants devront affecter la forme $1 - y^2$, $1 - k^2y^2$, en les divisant au besoin par des facteurs constants.

On devra donc avoir l'une des égalités

$$a',\ a,\ \ a' + ma,\ \ a' + na = 0,$$

avec l'une quelconque des suivantes qui ne soit pas de même rang

$$b',\ b,\ \ b' + mb,\ \ b' + nb = 0,$$

ce qui constitue douze combinaisons.

Toutefois, comme on ne doit pas avoir $ba' - ab' = 0$, ou $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, on ne devra pas prendre à la fois $b = 0$, $b' = 0$, ni $a = 0$ avec $a' = 0$, ce qui réduit le nombre de nos combinaisons à dix.

Première combinaison : $a' = 0$, $b = 0$. — Le radical qui entre dans la formule (3) prend la forme

$$y\sqrt{Ab'a[ma + b'y^2][na + b'y^2]}$$

ou bien, faisant abstraction du facteur y qui détruit celui qui entre au numérateur de du,

$$\sqrt{\frac{Ab'}{mna}\left(1 + \frac{b'}{ma}y^2\right)\left(1 + \frac{b'}{na}y^2\right)}.$$

Pour que cette expression affecte la forme

$$\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2y^2)},$$

à un facteur constant près, k étant moindre que un, il faut que

(4) $$A b' m n a > 0$$

et que

$$\frac{b'}{ma} = -1, \qquad \frac{b'}{na} = -k^2.$$

Ces deux dernières conditions seront remplies si l'on prend $\frac{b'}{a} = -m$ et $\frac{b'}{a} = -k^2 n$; on devra donc avoir $m = k^2 n$; cette condition sera satisfaite si m et n sont de mêmes signes, car on peut toujours supposer $n > m$ en valeur absolue.

Si l'on suppose m et n positifs, $\frac{b'}{a}$ ou $b'a$ sera négatif; la formule (4) exige alors que A soit négatif. Si m et n sont négatifs, $\frac{b'}{a}$ et $b'a$ sont positifs, A doit donc être positif; donc :

Si $A > 0$, $m < 0$, $n < 0$, la transformation à employer sera

$$x^2 = \frac{-1}{my^2};$$

Si $A < 0$, $m > 0$, $n > 0$, il faudra prendre encore

$$x^2 = \frac{-1}{my^2};$$

cette transformation réussit, mais elle est imaginaire; nous la rejetterons pour ce motif.

En discutant d'une façon analogue chacune des neuf autres combinaisons qui peuvent se présenter, on arrive à cette conclusion :

Pour ramener la différentielle (1) à la forme (2), où $k < 1$:

1° Si $A > 0$, $m > 0$, $n > 0$, posez

$$x^2 = \frac{y^2}{m(1-y^2)}.$$

2° Si $A > 0$, $m < 0$, $n > 0$, posez

$$x^2 = \frac{-1+y^2}{m}.$$

3° Si $A > 0$, $m < 0$, $n < 0$, posez

$$x^2 = \frac{y^2}{-m}.$$

4° Si $A < 0$, $m < 0$, $n < 0$, posez

$$x^2 = -\frac{m + (n-m)y^2}{mn}.$$

5° Si $A < 0$, $m < 0$, $n > 0$, posez

$$x^2 = \frac{-1}{m(1-y^2)}.$$

6° Si $A < 0$, $m > 0$, $n > 0$, aucune transformation réelle ne peut évidemment réussir.

Bien que l'on puisse réduire le module à être moindre que l'unité, il ne sera pas nécessaire dans la pratique d'effectuer cette réduction, ainsi qu'on le verra dans la suite. On pourra même faire usage de modules imaginaires.

IX. — Transformation de Landen.

Proposons-nous de transformer l'expression

(1) $$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

ou une autre de la forme

(2) $$\frac{m\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k'^2y^2)}}.$$

A cet effet, effectuons une transformation du second degré $x = \frac{U}{V}$; pour que cette transformation réussisse, il faut que l'on ait identiquement

$$(V-U)(V+U)(V-kU)(V+kU) = T^2(1-y^2)(1-k'^2y^2),$$

et l'on peut essayer d'y satisfaire en posant

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathrm{V}-\mathrm{U}=\alpha(1-y)(1-k'y), \\ \mathrm{V}+\mathrm{U}=\alpha'(1+y)(1+k'y), \\ \mathrm{V}-k\mathrm{U}=\varepsilon(a+by)^2, \\ \mathrm{V}+k\mathrm{U}=\varepsilon'(a'+b'y)^2, \end{cases}$$

ε et ε' étant égaux à ± 1; si l'on prend $\alpha=\alpha'$, les deux premières formules donneront

$$\mathrm{V}=\alpha+k'\alpha y^2,$$
$$\mathrm{U}=\alpha y(1+k');$$

les deux dernières formules (3) donnent alors

$$\alpha\left[1+k'y^2-k(1+k')y\right]=\varepsilon(a+by)^2,$$
$$\alpha\left[1+k'y^2+k(1+k')y\right]=\varepsilon'(a'+b'y)^2,$$

si l'on prend

$$(4)\qquad k^2(1+k')^2=4k'.$$

Les premiers membres de ces formules seront des carrés parfaits, et la substitution

$$x=\frac{y(1+k')}{1+k'y^2}$$

transformera la différentielle (1) en (2); d'ailleurs de (4) on tire

$$k=\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'},$$
$$k'=\frac{2-k^2\pm\sqrt{4-4k^2}}{k^2};$$

en effectuant la transformation, on a

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{dy(1+k')}{\sqrt{(1-y^2)(1-k'^2y^2)}}.$$

En résumé, *si l'on pose*

$$x=\frac{(1+k')y}{1+k'y^2},\qquad k=\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'},$$

x Gauss' Transformation

on aura

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{dy(1+k')}{\sqrt{(1-y^2)(1-k'^2y^2)}}.$$

On peut donner une autre forme à ce théorème et dire que, si l'on pose

$$\sin\varphi = \frac{(1+k')\sin\psi}{1+k'\sin^2\psi},$$

on aura

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{d\psi(1+k')}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}.$$

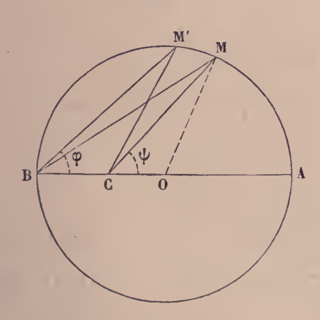
(Landen, *Philosophical Transactions*, 1775.)

§ X. — Interprétation géométrique.

Jacobi a donné une démonstration géométrique du résultat précédent (*Math. Werke*).

Considérons un cercle de rayon R (*fig.* 6); soient AB un

Fig. 6.



diamètre, C un point pris sur ce diamètre, O le centre. Soit $OC = a$, prenons un point M sur le cercle; soient $MCA = \psi$, $MBA = \varphi$ ses coordonnées angulaires; en déplaçant ce point infiniment peu et en l'amenant en M′, on a

$$MM' = 2R\,d\varphi \qquad \text{et} \qquad \frac{MM'}{MC} = \frac{2R\,d\varphi}{\sqrt{a^2+R^2+2aR\cos 2\varphi}}.$$

D'un autre côté,

$$\frac{MM'}{MC} = \frac{\sin M'CM}{\sin CM'M} = \frac{d\psi}{\cos CMO}$$
$$= \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 CMO}} = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}\sin^2\psi}};$$

en égalant les deux valeurs de $\frac{MM'}{MC}$, on a

$$\frac{2R\,d\varphi}{\sqrt{(a+R)^2 - 4aR\sin^2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2\sin^2\psi}{R^2}}},$$

et, si l'on pose

$$\frac{4aR}{(a+R)^2} = k^2, \qquad \frac{a^2}{R^2} = k'^2,$$

on aura

$$(1) \qquad \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\psi}} = \frac{2}{1+k'}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

$$(2) \qquad k = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}.$$

Enfin le triangle COM donnera

$$(3) \qquad \frac{\sin(2\varphi - \psi)}{\sin\psi} = \frac{a}{R} = k',$$

ce qui fera connaître φ en fonction de ψ, ou *vice versa*.

On donne quelquefois une autre forme à ces formules. On pose $k' = \operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2}$; la formule (2) devient alors

$$k = \frac{2\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2}} = \sin\theta;$$

de même,

$$\frac{2}{1+k'} = \frac{2}{1 + \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta} = 2\cos^2\frac{\theta}{2};$$

x. Legendre's form of Landen's Transformation

de sorte que (1) donne

$$\frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-\tang^2\frac{\theta}{2}\sin^2\psi}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}}.$$

Si $\tang\theta < 1$, $\tang^2\frac{\theta}{2}$ sera beaucoup plus petit que $\sin^2\theta$. La transformation de Landen permet donc de remplacer une intégrale elliptique par une autre de module plus petit; cette dernière sera plus facile à calculer par les séries. D'ailleurs, en appliquant plusieurs fois de suite la transformation de Landen, on a

$$\begin{aligned}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}} &= \frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-\sin^2\theta_1\sin^2\varphi_1}} \\ &= \frac{1}{2^2\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta_1}{2}}\int_0^{\varphi_2} \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-\sin^2\theta_2\sin^2\varphi_2}} \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Du reste,

$$\sin\theta_1 = \tang\frac{1}{2}\theta, \qquad \sin\theta_2 = \tang\frac{1}{2}\theta_1, \qquad \ldots,$$

de sorte que, θ_n étant suffisamment petit, on pourra prendre

$$\int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi_n}{\sqrt{1-\sin^2\theta_n\sin^2\varphi_n}} = \varphi_n$$

et l'on aura à peu près

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\varphi_n}{2^n\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta_1}{2}\ldots\cos^2\frac{\theta_{n-1}}{2}};$$

mais, au lieu de faire plusieurs transformations successives, il vaudra souvent mieux faire usage de la formule

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^\varphi d\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}};$$

si l'on développe la quantité qui multiplie $d\varphi$ par la formule du binôme, on a

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^\varphi d\varphi\left(1+\frac{k^2}{2}\sin^2\varphi+\frac{1.3}{2.4}k^4\sin^4\varphi+\ldots\right)$$

ou

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \varphi+\frac{k^2}{4}\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right) + \frac{1.3}{2.4}\frac{k^4}{8}\left(-\frac{\sin 4\varphi}{4}+\sin 2\varphi+\varphi\right)+\ldots.$$

XI. — Sur la moyenne arithmético-géométrique.

Soient m et n deux quantités positives arbitraires; posons

$$m_1 = \frac{m+n}{2}, \qquad n_1 = \sqrt{mn},$$
$$m_2 = \frac{m_1+n_1}{2}, \qquad n_2 = \sqrt{m_1 n_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

les quantités $m_1, m_2, m_3, \ldots$ tendent vers une certaine limite; les quantités $n_1, n_2, n_3, \ldots$ tendent vers la même limite que l'on appelle la moyenne arithmético-géométrique *des nombres m et n.*

D'abord les nombres m_1 et n_1 sont compris entre m et n, m_2 et n_2 sont compris entre m_1 et n_1, ... Ainsi, en se rappelant que la moyenne arithmétique de deux quantités est plus grande que leur moyenne géométrique, on voit que m_1, m_2, m_3, ... sont des nombres qui vont en décroissant sans devenir inférieurs à n_1; ces nombres ont donc une limite μ. Les nombres $n_1, n_2, n_3, \ldots$ ont de même une limite ν. Je dis que $\mu=\nu$; en effet, on a

$$m_{p+1} = \frac{m_p+n_p}{2}, \qquad n_{p+1} = \sqrt{m_p n_p};$$

on en conclut

$$m_{p+1} - n_{p+1} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{m_p} - \sqrt{n_p})^2$$

ou

$$\sqrt{m_{p+1}} - \sqrt{n_{p+1}}$$
$$= \frac{(\sqrt{m_p} - \sqrt{n_p})^2}{2(\sqrt{m_{p+1}} + \sqrt{n_{p+1}})} = (\sqrt{m_p} - \sqrt{n_p})\,\frac{\sqrt{m_p} - \sqrt{n_p}}{2(\sqrt{m_{p+1}} + \sqrt{n_{p+1}})}$$

ou

$$\sqrt{m_{p+1}} - \sqrt{n_{p+1}} < \tfrac{1}{2}(\sqrt{m_p} - \sqrt{n_p});$$

les différences $\sqrt{m_p} - \sqrt{n_p}$ vont donc en décroissant plus rapidement que les termes d'une progression géométrique de raison égale à $\frac{1}{2}$, donc $\sqrt{m_p}$ et $\sqrt{n_p}$ ou m_p et n_p ont même limite : ainsi $\mu = \nu$.

On peut déduire la valeur de μ des formules de transformation de Landen. Nous avons trouvé

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\psi}} = \frac{2}{1 + k'} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$
$$k = \frac{2\sqrt{k'}}{1 + k'},$$

$$\frac{\sin(2\varphi - \psi)}{\sin\psi} = k'.$$

Si l'on fait $\psi = 2\pi$, la dernière formule montre que $\varphi = 2\pi$; nous aurons alors, pour $\varphi = 2\pi$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{\cos^2\psi + (1 - k'^2)\sin^2\psi}} = \frac{2}{1 + k'} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + (1 - k^2)\sin^2\varphi}},$$
$$k = \frac{2\sqrt{k'}}{1 + k'}.$$

Maintenant posons

$$1 - k^2 = \frac{n^2}{m^2}, \qquad 1 - k'^2 = \frac{n_1^2}{m_1^2};$$

ces formules deviendront

$$\int_0^{2\pi} \frac{m_1\, d\psi}{\sqrt{m_1 \cos^2\psi + n_1 \sin^2\psi}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{n_1^2}{m_1^2}}} \int_0^{2\pi} \frac{m\, d\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}},$$

$$k = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}.$$

Or, en supposant

$$m_1 = \frac{m+n}{2}, \qquad n_1 = \sqrt{mn},$$

l'égalité $k = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$ est satisfaite, et l'on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{m_1^2\cos^2\psi + n_1^2\sin^2\psi}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}}.$$

On a donc, par un calcul de proche en proche,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m_p^2\cos^2\varphi + n_p^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}},$$

et à la limite, en remplaçant m_p et n_p par μ,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\mu} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}}$$

ou enfin

$$\frac{2\pi}{\mu} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}};$$

d'où l'on tire la valeur de la moyenne μ arithmético-géométrique, exprimée au moyen d'une intégrale elliptique.

Cette solution a été donnée par Gauss.

CHAPITRE VII.

THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

I. — Étude de l'intégrale $u = \int_0^z \frac{G\,dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}}$.

Proposons-nous d'étudier les diverses valeurs que peut prendre l'intégrale suivante où G, α, β, γ, δ sont indépendants de z,

$$u = \int_0^z \frac{G\,dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}},$$

quand on fait varier z en lui faisant suivre différents chemins.

Tous les chemins qui mènent de o en z peuvent se ramener au chemin rectiligne qui va de o en z (nous supposons que ce chemin ne rencontre aucun des points α, β, γ, δ, que l'on peut toujours éviter en décrivant un petit circuit autour de lui), précédé de un ou plusieurs lacets relatifs aux points critiques α, β, γ, δ (p. 134).

Soit i la valeur de l'intégrale u prise le long du contour rectiligne Oz, le radical étant pris alors avec une valeur bien déterminée, une fois pour toutes, que nous désignerons par $+\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}$, pour $z = 0$. Soient A, B, C, D les valeurs de la même intégrale u prise le long des lacets dont la partie rectiligne va de O en α, de O en β, de O en γ, de O en δ. Le radical étant toujours pris avec la valeur initiale que nous avons appelée $+\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}$:

1° Les chemins allant de O en z et pouvant se ramener au chemin rectiligne ont pour valeur i;

2° Les chemins se ramenant à un lacet suivi du chemin rectiligne Oz fournissent les valeurs $A - i$, $B - i$, $C - i$, $D - i$ de l'intégrale. En effet, l'intégrale prise le long du lacet relatif au point α est par hypothèse A; mais, quand le point z a décrit un lacet, le radical reprend en O une valeur égale à sa valeur initiale changée de signe; l'intégrale rectiligne à évaluer est donc

$$\int_0^z - \frac{G\,dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}},$$

c'est-à-dire $-i$, et par suite l'intégrale obtenue en suivant un lacet (celui qui est relatif au point α), puis le chemin rectiligne Oz, est $A - i$. C. Q. F. D.

L'intégrale prise le long d'un lacet ne dépend d'ailleurs pas du sens dans lequel est parcouru le lacet; en effet, l'intégrale u prise autour du cercle relatif au lacet est nulle, et l'intégrale A se réduit à

$$\int_0^\alpha \frac{G\,dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}} + \int_\alpha^0 \frac{G\,dz}{-\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}}.$$

On a placé le signe — devant le second radical, parce que, z tournant autour du point α, le radical revient au point de départ sur le cercle du lacet avec sa valeur primitive changée de signe; on a donc toujours

$$A = 2\int_0^\alpha \frac{G\,dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}}.$$

3° Si le point z suit successivement plusieurs lacets qui, parcourus isolément avec la valeur initiale $+\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}$ du radical, donneraient les valeurs P, Q, R, S, ..., V à l'intégrale u, puis le chemin rectiligne Oz, l'intégrale u prend évidemment la valeur

$$P - Q + R - S \ldots \pm V \mp i, \tag{1}$$

le signe + ou le signe — étant placé devant i suivant que le nombre des lettres P, Q, ..., V est pair ou impair.

Soit

$$m_1(A-B)+m_2(A-C)+m_3(A-D)$$
$$+m_4(B-C)+m_5(B-D)+m_6(C-D)=H,$$

$m_1, m_2, \ldots, m_6$ désignant des entiers positifs ou négatifs arbitraires; l'expression (1) est de l'une des formes

(2) $H+i,\quad H+A-i,\quad H+B-i,\quad H+C-i,\quad H+D-i;$

nous allons montrer qu'une partie de ces formes rentrent les unes dans les autres.

D'abord les quantités $B-C$, $B-D$, $C-D$ peuvent s'écrire

$$(A-C)-(A-B),\quad (A-D)-(A-B),\quad (A-D)-(A-C)$$

et l'expression H se réduit à la forme

$$m_1\omega_1+m_2\omega_2+m_3\omega_3=H,$$

en posant

$$\omega_1=A-B,\qquad \omega_2=A-C,\qquad \omega_3=A-D.$$

Or, si l'on prend l'intégrale u le long d'un cercle de rayon infini, on obtient un résultat nul; on doit obtenir le même résultat en parcourant successivement les lacets; donc

$$A-B+C-D=0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\omega_1+\omega_3-\omega_2=0;$$

ainsi $\omega_3=\omega_2-\omega_1$: l'expression H se réduit donc à la forme

$$m_1\omega_1+m_2\omega_2.$$

Or on a

$$A-B=\omega_1 \quad \text{ou} \quad B=A-\omega_1,$$
$$A-C=\omega_2 \quad \text{ou} \quad C=A-\omega_2,$$
$$A-D=\omega_2-\omega_1 \quad \text{ou} \quad D=A-\omega_2+\omega_1;$$

donc toutes les expressions précédentes (2) sont des deux formes

$$m_1\omega_1+m_2\omega_2+i,$$
$$m_1\omega_1+m_2\omega_2+A-i,$$

m_1 et m_2 désignant des entiers arbitraires.

II. — Étude rapide de la fonction inverse.

L'équation

$$u = \int_0^z \frac{G\,dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}}$$

permet à volonté de considérer u comme fonction de z, ou z comme fonction de u. Si l'on considère z comme fonction de u, je dis qu'à chaque valeur de u correspondra une et une seule valeur de z; c'est ce qui résulte de la théorie des équations différentielles (p. 127); z est défini par la condition de s'annuler pour $u = 0$ et de satisfaire à l'équation

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{G}\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}.$$

La fonction z ne pourrait cesser d'être monodrome qu'autour des points pour lesquels $z = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \infty$.

Supposons z voisin de α; si l'on pose $z = \alpha + \zeta^2$, on a

$$2\frac{d\zeta}{du} = \frac{1}{G}\sqrt{(\zeta^2+\alpha-\beta)(\zeta^2+\alpha-\gamma)(\zeta^2+\alpha-\delta)}.$$

Quand $z = \alpha$, on a $\zeta = 0$; or, quand u varie de manière que z reste dans le voisinage du point α, ζ reste monodrome; il en est donc de même de la fonction z. Si z est très grand, posons $z = \frac{1}{\zeta}$, l'équation différentielle qui définit z deviendra

$$\frac{d\zeta}{du} = -\frac{1}{G}\sqrt{(\alpha\zeta-1)(\beta\zeta-1)(\gamma\zeta-1)(\delta\zeta-1)}.$$

Quand z est très grand, ζ est très voisin de zéro; par suite, ζ est fonction monodrome de u, et il en est de même de z lorsque cette variable reste très grande.

A chaque valeur de z correspondent une infinité de valeurs de u, à savoir $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + u$ et $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + A - u$,

m_1, m_2 désignant des nombres entiers tout à fait arbitraires. Si l'on fait alors $z = f(u)$, on aura

$$f(m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + u) = f(u),$$
$$f(m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + A - u) = f(u);$$

ω_1 et ω_2 sont ce que l'on appelle les *périodes* de la fonction $f(u)$.

Si l'on mène dans le plan deux systèmes de droites parallèles à des distances ω_1 et ω_2 les unes des autres, on décomposera le plan en parallélogrammes de côtés ω_1 et ω_2 ; ces parallélogrammes seront dits *parallélogrammes des périodes*. De ce qui précède, il résulte que :

1° *Dans chaque parallélogramme des périodes, la fonction* $z = f(u)$ *ne passe que deux fois par la même valeur; car, en négligeant les multiples des périodes, on a, pour une même valeur de* z, *deux, et seulement deux valeurs de* u, *à savoir* u *et* $A - u$;

2° *Que la fonction* $f(u)$ *est partout monodrome et monogène;*

3° Puisque, pour chaque parallélogramme des périodes, elle passe deux fois par la même valeur, *elle a dans chaque parallélogramme deux zéros, à savoir* o *et* A;

4° *Elle a aussi dans chaque parallélogramme deux infinis.*

L'un d'eux est l'une des valeurs de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{G\,dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}} = a;$$

l'autre est $A - a$.

5° *On peut vérifier que la fonction* $f(u)$ *passe par toutes les valeurs deux fois, dans chaque parallélogramme des périodes.*

En effet, si l'on considère l'équation

$$f(u) - a = 0,$$

on obtiendra le nombre de ses racines diminué du nombre de ses infinis en calculant l'intégrale

$$V = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f'(u)\,du}{f(u)-a},$$

prise le long d'un parallélogramme des périodes; or cette intégrale est nulle; car $\frac{f(u)}{f'(u)-a}$, étant comme $f(u)$ doublement périodique, prend des valeurs égales le long des côtés opposés d'un parallélogramme des périodes. Deux côtés opposés étant parcourus en sens contraire fournissent donc V des éléments qui se détruisent : on a donc $V = 0$; donc le nombre des racines de $f(u) - a = 0$ est égal au nombre des infinis de $f(u)$, c'est-à-dire égal à deux. C. Q. F. D.

Remarque. — La fonction z de u définie par l'équation

$$u = \int_0^z \frac{G\,dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)(x-\varepsilon)}},$$

où ε est une nouvelle constante, n'est pas monodrome, comme on le verra plus tard; ce fait sépare nettement les intégrales elliptiques des autres intégrales abéliennes, telles que u, ou d'une forme plus compliquée.

III. — De la fonction $\sin\operatorname{am} u$ ou $\operatorname{sn} u$.

La fonction $\operatorname{sn} u = z$ est définie par l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dz}{du} = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)},$$

avec la condition $z = 0$ pour $u = 0$, ou par la formule

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Ses propriétés découlent de la théorie développée aux paragraphes précédents. Si l'on pose avec Jacobi

$$(2) \qquad K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$(3) \qquad K'\sqrt{-1} = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

ou encore, en faisant dans cette dernière formule $k'^2 = 1 - k^2$ et $1 - k^2z^2 = k'^2t^2$,

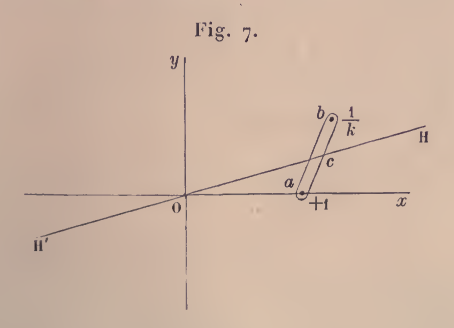
$$(4) \qquad K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}.$$

Les intégrales prises le long des lacets relatifs aux points critiques seront données par le Tableau suivant :

Le point	$+1$	fournira la valeur......	$2K$,
»	-1	»	$-2K$,
»	$+\frac{1}{k}$	»	$2K + 2K'\sqrt{-1}$,
»	$-\frac{1}{k}$	»	$-2K - 2K'\sqrt{-1}$;

en ce qui concerne les points critiques $+1$ et -1, cela est

Fig. 7.



évident. Pour calculer la valeur de l'intégrale relative au lacet du point $\frac{1}{k}$ (*fig.* 7), on remarquera que le contour fermé qui se compose des lacets successifs du point $\frac{1}{k}$ et du

point 1 est équivalent au double lacet *abc* : ainsi, en n'écrivant pas, pour abréger, la fonction à intégrer

$$2\int_0^{\frac{1}{k}} - 2\int_0^1 = 2\int_1^{\frac{1}{k}},$$

d'où

$$2\int_0^{\frac{1}{k}} = 2K + 2K'\sqrt{-1}.$$

Donc :

1° *La fonction* sn u *est monodrome et monogène.*

2° *Elle a deux périodes distinctes* $4K$ *et* $2K'\sqrt{-1}$.

3° *Elle a deux zéros dans chaque parallélogramme des périodes, à savoir* 0 *et* $2K$.

4° *Elle y a deux infinis; l'un d'eux* α *est donné par la formule*

$$\alpha = \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

où

$$2\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

On peut supposer que l'intégration s'effectue le long de la droite H'H passant en O et peu inclinée sur Ox; on peut remplacer cette droite par les deux lacets situés au-dessus d'elle et par une demi-circonférence de rayon infini ayant HH' pour diamètre, qui fournit une valeur nulle de l'intégrale; on a donc

$$2\alpha = 2K + 2K'\sqrt{-1} + 2K = 4K + 2K'\sqrt{-1},$$

d'où

$$\alpha = 2K + K'\sqrt{-1}.$$

Les deux infinis sont alors

$$2K + K'\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad 2K - (2K + K'\sqrt{-1}) = -K'\sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad K'\sqrt{-1}.$$

5° *On a aussi par définition de* K *et* K'

$$\operatorname{sn} K = 1, \qquad \operatorname{sn}(K + K'\sqrt{-1}) = \frac{1}{k},$$

6° *On a*

$$\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u, \qquad \operatorname{sn}(2K - u) = \operatorname{sn} u.$$

7° Si, dans la formule

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

on pose $z = \frac{1}{ky}$, on trouve

$$u = \pm \int_y^\infty \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \pm \int_0^\infty \cdots \mp \int_0^y \cdots,$$

c'est-à-dire

$$u = \alpha \mp \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

α désignant un infini ; on en déduit

$$\alpha - u = \pm \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

ou

$$\operatorname{sn}(\alpha - u) = \pm y = \frac{\pm 1}{kz} = \frac{\pm 1}{k \operatorname{sn} u};$$

si l'on fait $\alpha = -K'\sqrt{-1}$, par exemple, on a

$$\operatorname{sn}\left(K'\sqrt{-1} + u\right) = \pm \frac{1}{k \operatorname{sn} u};$$

il faut adopter le signe $+$, parce que, pour $u = K$, on a

$$\operatorname{sn}\left(K + K'\sqrt{-1}\right) = \frac{1}{k},$$

donc

$$\operatorname{sn}\left(\pm K'\sqrt{-1} + u\right) = \frac{1}{k \operatorname{sn} u}.$$

IV. — Sur les fonctions $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$.

On pose $\operatorname{cn} u = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u}$; mais cette définition est insuffisante, tant que l'on ne précise pas la valeur du radical qu'il

faut adopter; si l'on suppose que l'on prenne $\text{cn}\,0 = +1$, $\text{cn}\,u$ sera bien déterminé dans toute portion du plan ne contenant pas de point u, tel que $\text{sn}\,u = 1$ ou $\text{sn}\,u = \infty$. Si $\text{sn}\,u$ devient égal à 1, on peut poser $u = K + u'$, et l'on a

$$\text{sn}(K + u') = \text{sn}(2K - K - u') = \text{sn}(K - u');$$

la fonction $\text{sn}(K + u')$ est paire et peut se développer sous la forme $1 + Au'^2 + \dots$. On a alors

$$\text{cn}\,u = \sqrt{Au'^2 + Bu'^4 \dots} = u'\sqrt{A + Bu'^2 + \dots};$$

pour $\text{sn}\,u = 1$, $u' = 0$, $\text{cn}\,u$ reste monodrome par rapport à u' et, par suite, par rapport à u.

Si $\text{sn}\,u = \infty$, on peut supposer, par exemple, $u = K'\sqrt{-1}$; faisant alors $\text{cn}\,u = \frac{1}{v}$, $\text{sn}\,u = \frac{1}{w}$, on trouve

$$v = \frac{w}{\sqrt{w^2 - 1}}.$$

On voit que v est fonction monodrome de u quand $w = 0$, donc $\text{cn}\,u$ est fonction monodrome de u quand $\text{sn}\,u = \infty$. Nous arriverons aux mêmes conclusions par une autre voie. Nous poserons aussi

$$\text{dn}\,u = \sqrt{1 - k^2\,\text{sn}^2 u}, \qquad \text{dn}\,0 = +1$$

et l'on verra, comme on l'a fait pour la fonction $\text{cn}\,u$, que $\text{dn}\,u$ est monodrome, même lorsque $\text{sn}\,u = \frac{1}{k}$; en posant $u = K'\sqrt{-1} + u'$, alors

$$\text{dn}\,u = \sqrt{1 - k^2\,\text{sn}\left(K'\sqrt{-1} + u'\right)} = \sqrt{1 - \frac{1}{\text{sn}^2 u'}} = \frac{\sqrt{\text{sn}^2 u' - 1}}{\text{sn}\,u'};$$

$\text{dn}\,u$ est monodrome par rapport à u' quand u' est très petit, et par suite, par rapport à u. Donc, etc. C. Q. F. D.

Reprenons la formule

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}},$$

où $z = \operatorname{sn} u$, $\sqrt{1 - z^2} = \operatorname{cn} u$, $\sqrt{1 - k^2 z^2} = \operatorname{dn} u$. Soit u_0 la valeur de l'intégrale quand z suit le chemin rectiligne Oz.

1° Si l'on suit le lacet $+1$ et le chemin rectiligne, on aura

$$u = 2K - u_0;$$

$\operatorname{cn} u = \sqrt{1 - z^2}$ revient en z avec la valeur primitive changée de signe, $\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 z^2}$ revient avec sa valeur primitive : donc

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{sn}(2K - u_0) &= \operatorname{sn} u_0,\\ \operatorname{cn}(2K - u_0) &= -\operatorname{cn} u_0,\\ \operatorname{dn}(2K - u_0) &= \operatorname{dn} u_0.\end{aligned}\right.$$

2° Si l'on suit le lacet $+\frac{1}{k}$, u prend la valeur

$$2K + 2K'\sqrt{-1} - u_0,$$

$\operatorname{cn} u = \sqrt{1 - z^2}$ reprend sa valeur initiale à l'origine, mais $\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 z^2}$ change de signe, et l'on a

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{sn}\left(2K + 2K'\sqrt{-1} - u_0\right) &= \operatorname{sn} u_0,\\ \operatorname{cn}\left(2K + 2K'\sqrt{-1} - u_0\right) &= \operatorname{cn} u_0,\\ \operatorname{dn}\left(2K + 2K'\sqrt{-1} - u_0\right) &= -\operatorname{dn} u_0.\end{aligned}\right.$$

3° Suivant deux lacets -1 et $+1$, puis le chemin rectiligne, u prend la valeur $4K + u$, $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$ reviennent en dernier lieu à l'origine avec leurs signes primitifs, et l'on a

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{sn}(4K + u_0) &= \operatorname{sn} u_0,\\ \operatorname{cn}(4K + u_0) &= \operatorname{cn} u_0,\\ \operatorname{dn}(4K + u_0) &= \operatorname{dn} u_0.\end{aligned}\right.$$

4° Suivant deux lacets $-\frac{1}{k}$ et $+\frac{1}{k}$ et le chemin rectiligne, on est conduit aux formules

$$\operatorname{sn}\left(4K + 4K'\sqrt{-1} + u_0\right) = \operatorname{sn} u_0, \qquad \ldots$$

ou, en vertu des formules précédentes,

$$(4)\qquad \begin{cases} \operatorname{sn}(4K'\sqrt{-1}+u_0)=\operatorname{sn}u_0,\\ \operatorname{cn}(4K'\sqrt{-1}+u_0)=\operatorname{cn}u_0,\\ \operatorname{dn}(4K'\sqrt{-1}+u_0)=\operatorname{dn}u_0.\end{cases}$$

5° En suivant les lacets 1 et $\frac{1}{k}$ et le chemin rectiligne, on trouve

$$(5)\qquad \begin{cases} \operatorname{sn}(2K'\sqrt{-1}+u_0)=\operatorname{sn}u_0,\\ \operatorname{cn}(2K'\sqrt{-1}+u_0)=-\operatorname{cn}u_0,\\ \operatorname{dn}(2K'\sqrt{-1}+u_0)=-\operatorname{dn}u_0.\end{cases}$$

D'ailleurs on a

$$\operatorname{sn}(-u)=-\operatorname{sn}u,\qquad \operatorname{cn}-u=\operatorname{cn}u,\qquad \operatorname{dn}-u=\operatorname{dn}u;$$

car, quand z se change en $-z$, u se change en $-u$, etc., on conclut de (3) que $4K$ est une période des trois fonctions; mais, en changeant dans la formule (1) u_0 en $-u_0$ et en observant que $\operatorname{dn}u_0=\operatorname{dn}(-u_0)$, on a

$$\operatorname{dn}(2K+u_0)=\operatorname{dn}u_0;$$

ainsi $2K$ est une période plus simple de $\operatorname{dn}u$.

En vertu de (4), $4K'\sqrt{-1}$ est une période des trois fonctions, mais $2K'\sqrt{-1}$ est déjà une période de $\operatorname{sn}u$, et, si l'on change u_0 en $-u_0$ dans (3), on voit que $2K+2K'\sqrt{-1}$ est une période de $\operatorname{cn}u$.

6° En résumé, $4K$ et $4K'\sqrt{-1}$ sont des périodes communes aux trois fonctions; mais elles ont individuellement des périodes plus simples :

$\operatorname{sn}u$	a pour périodes	$4K$	et	$2K'\sqrt{-1}$,
$\operatorname{cn}u$	»	$4K$	et	$2K+2K'\sqrt{-1}$,
$\operatorname{dn}u$	»	$2K$	et	$4K'\sqrt{-1}$.

7° Les infinis de $\operatorname{sn}u$, $\operatorname{cn}u$, $\operatorname{dn}u$ sont évidemment les mêmes, à savoir $K'\sqrt{-1}$ et $2K+K'\sqrt{-1}$.

8° Les équations $\operatorname{cn}u=a$, $\operatorname{dn}u=a$ ont évidemment

autant de solutions dans chaque parallélogramme des périodes qu'elles possèdent d'infinis, c'est-à-dire deux; la démonstration de ce fait est identique à celle que l'on a faite à propos de l'équation $\operatorname{sn} u = a$; $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$ en particulier ont deux zéros dans leurs parallélogrammes respectifs. $\operatorname{cn} u$ est nul quand $\operatorname{sn} u = 1$, donc les zéros de $\operatorname{cn} u$ sont K et, en vertu de (2), $K + 2K'\sqrt{-1}$ ou, en retranchant une période, $-K$. Pour trouver les zéros de $\operatorname{dn} x$, on observe que

$$\operatorname{sn}(K - K'\sqrt{-1}) = \frac{1}{k};$$

donc

$$\operatorname{dn}(K - K'\sqrt{-1}) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{dn}(K + K'\sqrt{-1}) = 0$$

et

$$\operatorname{dn}(-K + K'\sqrt{-1}) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{dn} -(K + K'\sqrt{-1}) = 0.$$

Le Tableau suivant résume les principales propriétés des trois fonctions :

	$\operatorname{sn} u$.	$\operatorname{cn} u$.	$\operatorname{dn} u$.
Périodes .	$4K,\ 2K'\sqrt{-1}$	$4K,\ 2K + 2K'\sqrt{-1}$	$2K,\ 4K'\sqrt{-1}$
Zéros....	$0,\ 2K$	$K,\ -K$	$\pm(K + K'\sqrt{-1})$
Infinis ...	$2K + K'\sqrt{-1}$, $K'\sqrt{-1}$	Id.	Id.

V. — Dérivées de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

De l'équation

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}$$

on tire

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}$$

ou

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{sn}' u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u.$$

On a ensuite, en différentiant

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u},$$

$$\operatorname{cn}' u = -\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}' u}{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u}} = -\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$$

ou, finalement,

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{cn}' u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u;$$

de même, en différentiant

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u},$$

on a

$$\operatorname{dn}' u = -\frac{k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}' u}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}} = -k^2 \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$$

ou

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{dn}' u = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

Si l'on avait quelques doutes sur les signes des seconds membres des formules (1), (2), (3), on observerait que ces formules, ayant lieu pour de petites valeurs de u, sont générales.

Si l'on pose $\operatorname{sn} u = p$, $\operatorname{cn} u = q$, $\operatorname{dn} u = r$, on voit que les formules (1), (2), (3), donnent

$$\frac{dp}{du} = \quad qr,$$

$$\frac{dq}{du} = -rp,$$

$$\frac{dr}{du} = -k^2 pq.$$

On a donc une solution des équations différentielles précédentes en prenant $p = \operatorname{sn}(u + c)$, $q = \operatorname{cn}(u + c)$, $q = \operatorname{dn}(u + c)$; c et k désignent alors des constantes. Cette remarque sera utilisée plus tard.

VI. — Résidus des fonctions elliptiques.

Le résidu de $\operatorname{sn} x$ pour $x = K'\sqrt{-1}$, par exemple, est la limite de

$$(x - K'\sqrt{-1}) \operatorname{sn} x$$

pour $x = K'\sqrt{-1}$, ou de

$$\varepsilon \operatorname{sn}(K'\sqrt{-1} + \varepsilon)$$

pour $\varepsilon = 0$, ou, en vertu d'une formule du paragraphe précédent, de

$$\frac{\varepsilon}{k \operatorname{sn} \varepsilon},$$

ou de

$$\frac{1}{k \operatorname{cn} \varepsilon \operatorname{dn} \varepsilon},$$

c'est-à-dire $\frac{1}{k}$.

Les autres résidus se calculent d'une manière analogue quand on connaît $\operatorname{cn}(K'\sqrt{-1} + \varepsilon)$, $\operatorname{dn}(K'\sqrt{-1} + \varepsilon)$; nous apprendrons à les calculer plus loin.

VII. — Remarque importante.

Les zéros et les infinis de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ sont simples; en effet, on a trouvé

$$\operatorname{sn}' x = \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x.$$

Si l'on fait $x = 0$ ou $x = 2K$, on voit que $\operatorname{sn}' x$ reste fini; donc les zéros de $\operatorname{sn} x$ sont simples; on verrait de même que ceux de $\operatorname{cn} x$ et $\operatorname{dn} x$ sont simples aussi.

Cette même formule montre que, si $\operatorname{sn} x$ est infini, d'abord $\operatorname{cn} x = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 x}$ et $\operatorname{dn} x = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x}$ sont infinis de même ordre; donc $\operatorname{sn}' x$ et $\operatorname{sn}^2 x$ sont infinis de même ordre. Supposons donc que $\operatorname{sn} x$ ait un infini d'ordre α, $\operatorname{sn}' x$ aura

cet infini à l'ordre $\alpha + 1$ et $\operatorname{sn}^2 x$ de l'ordre 2α; on doit donc avoir

$$\alpha + 1 = 2\alpha \quad \text{ou} \quad \alpha = 1;$$

ainsi $\operatorname{sn} x$ ne peut avoir que des infinis simples; il en est évidemment de même des deux autres fonctions $\operatorname{cn} x$ et $\operatorname{dn} x$.

VIII. — Discussion rapide des fonctions elliptiques.

Il est naturel de chercher à discuter la fonction $\operatorname{sn} u$ au moyen de la formule

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

qui sert à la définir quand on y suppose k réel et moindre que 1. On voit que u et x sont de mêmes signes, qu'ils varient dans le même sens, jusqu'à ce que $x = \pm 1$: à partir de là, u cesse d'être réel quand x croît; x, c'est-à-dire $\operatorname{sn} u$, varie donc entre les limites -1 et $+1$ quand u varie de

$$-\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} \quad \text{à} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}};$$

ces quantités seront désignées par $-\mathrm{K}$ et $+\mathrm{K}$; il semble que u ne puisse pas prendre d'autres valeurs, mais c'est là une erreur analogue à celle dans laquelle on tomberait si l'on partait de la formule

$$\arcsin x = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

pour définir le sinus, et ici il semblerait également que l'arc sinus dût varier entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, mais l'arc sinus franchit en réalité ces limites, parce que l'on admet que la dérivée peut être $\pm \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ et que le passage de x par un, annulant

le radical, lui permet de changer de signe. Si donc on veut retrouver la continuité dans l'arc sinus, il faut nécessairement prendre le radical avec le double signe. Nous ferons de même dans la discussion de l'amplitude u, et nous admettrons alors que u continue de s'accroître, quand x décroît, le radical changeant de signe; alors x ou $\operatorname{sn} u$ va successivement repasser par la série de valeurs par lesquelles il était passé et l'on aura $\operatorname{sn}(K + u) = \operatorname{sn}(K - u)$; on a donc, en observant que $\operatorname{sn} u = \operatorname{sn}(-u)$,

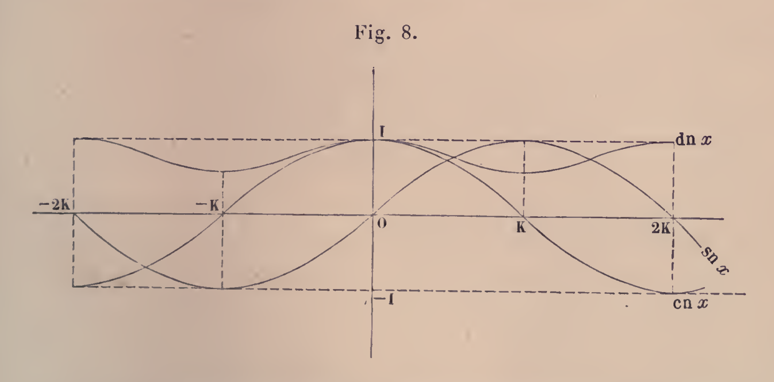
$$\operatorname{sn}(K + u) = -\operatorname{sn}(u - K) = \operatorname{sn}(u - 3K)$$

et, en faisant $K + u = v$,

$$\operatorname{sn} v = \operatorname{sn}(v - 4K);$$

et, par suite aussi, $\operatorname{sn} v = \operatorname{sn}(v + 4K) = \operatorname{sn}(v + 4mK)$, en désignant par m un entier quelconque; $4K$ est donc une période de $\operatorname{sn} x$ comme 2π est une période de $\sin x$. La *fig.* 8

Fig. 8.



ci-contre représente assez bien la marche de la courbe $y = \operatorname{sn} x$ pour $k < 1$; on y a joint les courbes $y = \operatorname{cn} x$, $y = \operatorname{dn} x$. Lamé appelait $\operatorname{sn} x$ un *pseudo-sinus*, $\operatorname{cn} x$ un *pseudo-cosinus* et $\operatorname{dn} x$ un *pseudo-rayon*; $\operatorname{cn} x$ a pour période $4K$, mais $\operatorname{dn} x$ a pour période $2K$. La courbe $y = \operatorname{cn} x$ ne diffère de $y = \operatorname{sn} x$ que par sa position, et l'on a $\operatorname{cn} x = \operatorname{sn}(K - x)$.

IX. — Équation d'Euler.

L'équation suivante

$$(\alpha)\quad \frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}} = \frac{\pm\, dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}},$$

dans laquelle A, B, C, D, E désignent des constantes, s'intègre bien facilement au moyen des quadratures, et, pour obtenir cette intégrale, il suffit évidemment d'écrire le signe $\int$ en avant de chacun des deux membres. Mais il est bien remarquable que l'intégrale générale de cette équation, qui se présente naturellement sous une forme transcendante, peut se mettre sous la forme algébrique

$$(\beta)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}+\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4} \\ &\quad =(x-y)\sqrt{E(x+y)^2+D(x+y)+K}, \end{aligned} \right.$$

K désignant une constante arbitraire. Euler, à qui l'on doit cette découverte, est parvenu à ce résultat, dit-il, « *quasi divinando* » ; et, malgré les progrès de la Science, on n'a d'autres méthodes naturelles pour y parvenir que celles qui sont précisément basées sur la théorie des fonctions elliptiques, que le résultat trouvé par Euler a pour ainsi dire fait naître.

Richelot et Cauchy ont essayé de donner des démonstrations directes de la formule (β), mais il est plus simple et plus naturel encore de la vérifier par la différentiation après l'avoir résolue par rapport à K.

Lagrange a intégré l'équation d'Euler d'une façon assez élégante, comme on va le voir, en la ramenant d'abord, au moyen d'un changement de variable, à la forme

$$(1)\qquad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

puis, en posant

$$x=\sin\varphi, \qquad y=\sin\psi,$$

à la forme

$$\text{(1 bis)}\qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}.$$

En égalant ces rapports à dt, on a

$$(2)\qquad \frac{d\varphi}{dt}=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},\qquad \frac{d\psi}{dt}=\sqrt{1-k^2\sin^2\psi};$$

si l'on différentie ces deux équations par rapport à t, on trouve

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\frac{d\varphi}{dt},\qquad \frac{d^2\psi}{dt^2}=-\frac{k^2\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\frac{d\psi}{dt}$$

ou, en vertu de (2),

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-k^2\sin\varphi\cos\varphi,\qquad \frac{d^2\psi}{dt^2}=-k^2\sin\psi\cos\psi.$$

Posons

$$2\varphi=p+q,\qquad 2\psi=p-q;$$

nous aurons

$$\frac{d^2p}{dt^2}+\frac{d^2q}{dt^2}=-k^2\sin(p+q),\qquad \frac{d^2p}{dt^2}-\frac{d^2q}{dt^2}=-k^2\sin(p-q);$$

d'où l'on tire

$$(3)\qquad \frac{d^2p}{dt^2}=-k^2\sin p\cos q,\qquad \frac{d^2q}{dt^2}=-k^2\sin q\cos p.$$

Les formules (2) donnent encore

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2=k^2(\sin^2\psi-\sin^2\varphi)$$

ou

$$\frac{d(\varphi+\psi)}{dt}\frac{d(\varphi-\psi)}{dt}=\frac{1}{2}k^2(\cos2\varphi-\cos2\psi)$$

ou

$$\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt}=\frac{1}{2}k^2[\cos(p+q)-\cos(p-q)]$$

ou enfin

$$\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt} = -k^2 \sin p \sin q.$$

De cette formule et de (3) on tire

$$\frac{d^2 p}{dp\,dq} = \cot q, \qquad \frac{d^2 q}{dp\,dq} = \cot p$$

ou

$$\frac{d^2 p}{dp} = \cot q\, dq, \qquad \frac{d^2 q}{dq} = \cot p\, dp;$$

en intégrant, il vient

$$\log \frac{dp}{dt} = \log \sin q + \log b, \qquad \log \frac{dq}{dt} = \log \sin p + \log a,$$

ou

$$(4) \qquad \frac{dp}{dt} = b \sin q, \qquad \frac{dq}{dt} = a \sin p,$$

a et b désignant des constantes; on en déduit

$$a \sin p\, dp = b \sin q\, dq$$

ou, en intégrant et en appelant c une constante,

$$(5) \qquad a \cos p = b \cos q + c.$$

Les équations (4) donnent, en remplaçant p et q par leurs valeurs,

$$\frac{d(\varphi + \psi)}{dt} = b \sin(\varphi - \psi), \qquad \frac{d(\varphi - \psi)}{dt} = a \sin(\varphi + \psi)$$

ou

$$(6) \qquad \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} = b \sin(\varphi - \psi),$$

$$(7) \qquad \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} = a \sin(\varphi + \psi).$$

D'ailleurs, entre les constantes a et b, on a la relation

$$ab = -k^2,$$

ainsi qu'on s'en assure en multipliant (6) et (7) membre à membre. La formule (5) peut s'écrire

$$(8) \qquad a\cos(\varphi+\psi) = b\cos(\varphi-\psi) + c.$$

Désignons par μ la valeur que prend φ pour $\psi = 0$: les formules (6), (7), (8) donneront

$$(9) \qquad \begin{cases} \sqrt{1-k^2\sin^2\mu} + 1 = b\sin\mu, \\ \sqrt{1-k^2\sin^2\mu} - 1 = a\sin\mu, \\ a\cos\mu - b\cos\mu = c. \end{cases}$$

Remplaçons dans (8) a, b, c par leurs valeurs tirées de (9), nous aurons

$$\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\mu}-1}{\sin\mu}\cos(\varphi+\psi) - \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\mu}+1}{\sin\mu}\cos(\varphi-\psi)$$
$$= \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\mu}-1}{\sin\mu}\cos\mu - \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\mu}+1}{\sin\mu}\cos\mu$$

ou bien

$$(10) \qquad \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\mu} = \cos\mu,$$

équation célèbre et que l'on interprète facilement en observant que, si l'on pose

$$\cos M = -\sqrt{1-k^2\sin^2\mu},$$

φ, ψ, μ seront les côtés opposés d'un triangle sphérique dont l'angle opposé à μ sera M.

Si l'on change ψ en $-\psi$, on voit que

$$\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\mu} = \cos\mu$$

sera une intégrale de

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = 0.$$

X. — Addition des fonctions elliptiques. Méthode de Lagrange.

Je suppose que l'on soit parvenu à intégrer sous forme algébrique l'équation

$$(1) \qquad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0,$$

si l'on pose $x = \operatorname{sn} u$, $y = \operatorname{sn} v$, une intégrale de cette équation sera

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \text{const.}$$

ou

$$u + v = \text{const.};$$

soit

$$\varphi(x, y) = \text{const.}$$

L'intégrale algébrique de (1), $u+v$ et $\varphi(x, y)$ étant constants en même temps, on aura

$$u + v = \mathrm{F}[\varphi(x, y)]$$

ou

$$u + v = \mathrm{F}[\varphi(\operatorname{sn} u, \operatorname{sn} v)],$$

et la fonction F sera facile à déterminer en faisant $v = 0$, par exemple; on pourra donc calculer $u+v$ en fonction de $\operatorname{sn} u$ et $\operatorname{sn} v$, et l'on obtiendra diverses formules suivant la nature de la fonction φ que l'on aura trouvée; toutes ces formules devront évidemment rentrer les unes dans les autres.

En posant $x = \sin\varphi$, $y = \sin\psi$, la formule (1) devient

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = 0,$$

et Lagrange a trouvé, pour intégrale de cette équation (p. 205),

$$\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\mu} = \cos\mu,$$

μ désignant la constante d'intégration; cette intégrale, en reprenant x et y pour variables, devient

$$\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} \mu = \operatorname{cn} \mu,$$

μ est la fonction de $u + v$ qu'il faut déterminer; or, en faisant $u = 0$, on a

$$\operatorname{cn} v = \operatorname{cn} \mu,$$

donc $\mu = u + v$, et l'on a

$$\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v + \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn}(u + v) = \operatorname{cn}(u + v). \tag{2}$$

Si à cette formule on adjoint les suivantes

$$\operatorname{cn}(u + v) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(u + v)},$$
$$\operatorname{dn}(u + v) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u + v)},$$

on obtient des formules qui donnent

$$\operatorname{sn}(u + v), \quad \operatorname{dn}(u + v), \quad \operatorname{cn}(u + v),$$

qui sont

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sn}(u + v) &= \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \\ \operatorname{cn}(u + v) &= \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \\ \operatorname{dn}(u + v) &= \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn} u^2 \operatorname{sn}^2 v}, \end{aligned} \right.$$

et que nous retrouverons dans le paragraphe suivant.

Ces calculs sont compliqués et laissent subsister quelques incertitudes sur les signes que l'on doit adopter. Abel se borne à vérifier les formules précédentes dans son exposition de la *Théorie des fonctions elliptiques*. Voici comment : appelons f le second membre de l'une quelconque de ces formules; il vérifie que l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\partial(f, u + v)}{\partial(u, v)} = 0.$$

Il en conclut que les seconds membres de ces formules sont fonctions de $u+v$; puis, faisant dans le second membre de la première, par exemple, $v=0$, il trouve qu'il se réduit à $\operatorname{sn} u$; il en conclut que ce second membre est égal à $\operatorname{sn}(u+v)$.

Despeyrous arrive assez rapidement aux formules (3) en remarquant que, en multipliant l'équation (1) par

$$\frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2},$$

son premier membre devient une différentielle exacte; alors l'intégrale de cette équation se présente sous la forme

$$\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}=\text{const.},$$

ce qui fournit immédiatement la première formule (1), mais ces procédés sont tous longs ou détournés. Nous établirons ces formules d'addition par la méthode de Clebsch qui, à cause de sa grande généralité, nous sera utile dans d'autres circonstances.

XI. — Méthode de Clebsch.

La méthode de Clebsch repose sur le théorème d'Abel (p. 154) : coupons la courbe

(1) $$y^2=(1-x^2)(1-k^2x^2)$$

par la parabole

(2) $$y=1+\beta x+\alpha x^2;$$

si l'on appelle (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) les coordonnées des points d'intersection, en vertu du théorème d'Abel, on doit avoir

(3) $$\frac{dx_1}{y_1}+\frac{dx_2}{y_2}+\frac{dx_3}{y_3}+\frac{dx_4}{y_4}=0,$$

car ici $2y$ est la dérivée relative à y du premier membre de (1). Or l'un des points d'intersection des courbes (1), (2) a pour coordonnées 0 et 1. La formule (3) se réduit alors, en supposant $y_4 = 1$, $x_4 = 0$, à

$$\frac{dx_1}{y_1} + \frac{dx_2}{y_2} + \frac{dx_3}{y_3} = 0 \tag{4}$$

ou à

$$\frac{dx_1}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-k^2x_1^2)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{(1-x_2^2)(1-k^2x_2^2)}} + \frac{dx_3}{\sqrt{(1-x_3^2)(1-k^2x_3^2)}} = 0.$$

Posant alors $x_1 = \operatorname{sn} a$, $x_2 = \operatorname{sn} b$, $x_3 = \operatorname{sn} c$, cette formule donne

$$da + db + dc = 0; \tag{5}$$

or x_1, x_2, x_3, x_4 satisfont à l'équation

$$(1-x^2)(1-k^2x^2) = (1+\beta x + \alpha x^2)^2$$

ou

$$x^3(k^2-\alpha^2) - 2\alpha\beta x^2 - (1+k^2+2\alpha+\beta^2)x - 2\beta = 0.$$

On en tire

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= \frac{2\alpha\beta}{k^2-\alpha^2}, \\ x_1x_2x_3 &= \frac{2\beta}{k^2-\alpha^2}, \\ \alpha &= \frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

On a aussi

$$y_1 = 1 + \beta x_1 + \alpha x_1^2,$$
$$y_2 = 1 + \beta x_2 + \alpha x_2^2$$

ou

$$y_1x_2 - x_1y_2 = x_2 - x_1 + \alpha x_1x_2(x_1 - x_2)$$

ou, en vertu de la dernière formule (6),

$$x_3 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_2y_1 - y_2x_1},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{sn} c = \frac{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b}{\operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b};$$

mais, en vertu de (5),

$$dc = -da - db,$$

ou, en appelant G une constante,

$$c = G - a - b;$$

on a donc

$$\operatorname{sn}(G - a - b) = \frac{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b}{\operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}.$$

Pour déterminer G, il suffit de faire $-a = b$; on a alors $\operatorname{sn} G = 0$, et l'on peut prendre $G = 0$: on trouve ainsi

$$\operatorname{sn}(a + b) = \frac{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b}{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}.$$

Multipliant haut et bas dans le second membre par

$$\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a,$$

le dénominateur devient

$$\operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 b \operatorname{dn}^2 b - \operatorname{sn}^2 b \operatorname{cn}^2 a \operatorname{dn}^2 a$$

ou

$$\operatorname{sn}^2 a(1 - \operatorname{sn}^2 b)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 b) - \operatorname{sn}^2 b(1 - \operatorname{sn}^2 a)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a)$$

ou

$$(\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b);$$

et l'on a, toutes réductions faites,

$$\operatorname{sn}(a + b) = \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}.$$

Telle est la démonstration la plus directe que l'on connaisse de la formule d'addition des fonctions elliptiques.

Cette formule, en posant $\operatorname{sn} a = s$, $\operatorname{cn} a = c$, $\operatorname{dn} a = d$, $\operatorname{sn} b = s'$, $\operatorname{cn} b = c'$, $\operatorname{dn} b = d'$, peut s'écrire

$$\operatorname{sn}(a + b) = \frac{sc'd' + s'cd}{1 - k^2 s^2 s'^2};$$

on en tire

$$1 - \operatorname{sn}^2(a + b) = \frac{(1 - k^2 s^2 s'^2)^2 - (sc'd' + s'cd)^2}{(1 - k^2 s^2 s'^2)^2}$$

ou

$$\text{cn}^2(a+b)$$
$$= \frac{1-2k^2s^2s'^2+k^4s^2s'^2-s^2(1-s'^2)(1-k^2s'^2)-s'^2(1-s^2)(1-k^2s^2) \mp 2ss'cc'dd'}{(1-k^2s^2s'^2)^2}$$
$$= \frac{(1-s^2)(1-s'^2)+s^2s'^2(1-k^2s^2)(1-k^2s'^2)-2ss'cc'dd'}{(1-k^2s^2s'^2)^2}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\pm\,\text{cn}(a+b) = \frac{\text{cn}\,a\,\text{cn}\,b - \text{dn}\,a\,\text{dn}\,b\,\text{sn}\,a\,\text{sn}\,b}{1-k^2\,\text{sn}^2 a\,\text{sn}^2 b};$$

on prendra le signe $+$ devant le premier membre, afin que la formule ait lieu pour $b=0$.

On calcule de même $\text{dn}(a+b)$ et l'on arrive ainsi aux formules

$$\text{sn}(a\pm b) = \frac{\text{sn}\,a\,\text{cn}\,b\,\text{dn}\,b \pm \text{sn}\,b\,\text{cn}\,a\,\text{dn}\,a}{1-k^2\,\text{sn}^2 a\,\text{sn}^2 b},$$

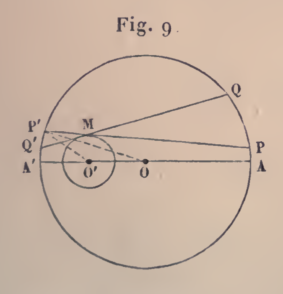
$$\text{cn}(a\pm b) = \frac{\text{cn}\,a\,\text{cn}\,b \mp \text{dn}\,a\,\text{dn}\,b\,\text{sn}\,a\,\text{sn}\,b}{1-k^2\,\text{sn}^2 a\,\text{sn}^2 b},$$

$$\text{dn}(a\pm b) = \frac{\text{dn}\,a\,\text{dn}\,b \mp k^2\,\text{sn}\,a\,\text{sn}\,b\,\text{cn}\,a\,\text{cn}\,b}{1-k^2\,\text{sn}^2 a\,\text{sn}^2 b}.$$

XII. — Nouvelle méthode. — Théorème de Poncelet.

Soient O et O′ les centres des deux cercles (*fig.* 9), soient

Fig. 9



PP′ et QQ′ deux tangentes infiniment voisines au cercle O′; soient R et r les rayons des deux cercles O et O′; soient enfin

$\frac{AP}{R} = 2\varphi$, $\frac{AP'}{R} = 2\psi$, $OO' = a$. Les triangles MPQ et MP′Q′ donnent

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{MP}{MP'}$$

ou

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{\sqrt{\overline{O'P'}^2 - r^2}}{\sqrt{\overline{O'P}^2 - r^2}} = \sqrt{\frac{R^2 + a^2 + 2Ra\cos 2\psi - r^2}{R^2 + a^2 + 2Ra\cos 2\varphi - r^2}};$$

si l'on fait alors

$$(1) \qquad \frac{4Ra}{(R+a)^2 - r^2} = k^2,$$

on aura

$$(2) \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}.$$

Il résulte de là que, si sur la figure on trouve une relation finie entre les angles φ et ψ, ce sera l'intégrale de (2), et l'on aura ainsi un nouveau procédé pour intégrer la formule (2). Or on a, en projetant le contour O′OPM sur O′M,

$$a\cos(\varphi + \psi) + R\cos(\psi - \varphi) = r$$

ou

$$(a + R)\cos\varphi\cos\psi + (R - a)\sin\varphi\sin\psi = r$$

ou encore

$$(3) \qquad \cos\varphi\cos\psi + \left(\frac{R-a}{R+a}\right)\sin\varphi\sin\psi = \frac{r}{R+a}.$$

De la formule (2) on tire

$$(4) \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} = \int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu}},$$

μ désignant la valeur de φ pour $\psi = 0$; on conclut de là que,

si l'on fait $\psi = 0$ dans (3),

$$\cos\mu = \frac{r}{R+a},$$

$$\sin\mu = \sqrt{\frac{(R+a)^2 - r^2}{(R+a)^2}},$$

$$1 - k^2\sin^2\mu = 1 - \frac{4Ra}{(R+a)^2 - r^2}\,\frac{(R+a)^2 - r^2}{(R+a)^2}$$

$$= 1 - \frac{4Ra}{(R+a)^2} = \left(\frac{R-a}{R+a}\right)^2,$$

et la formule (3) s'écrit

$$\cos\varphi\cos\psi \pm \sqrt{1 - k^2\sin^2\mu}\,\sin\varphi\sin\psi = \cos\mu,$$

résultat déjà obtenu (p. 205). Jacobi, à qui l'on doit la méthode précédente, en a déduit la démonstration d'un théorème curieux de Poncelet. La formule (4) peut s'écrire

$$\int_0^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\mu} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

en changeant φ en φ_1 et ψ en φ_2, ou encore en posant, pour abréger,

$$d\varpi = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \qquad \int_0^{\varphi_2} d\varpi - \int_0^{\varphi_1} d\varpi = \int_0^{\mu} d\varpi.$$

Supposons que par le point P′ on mène une tangente P′P″ au cercle r, soit P″ le point où elle rencontre le cercle R; par le point P″, menons encore une tangente P″P‴ au cercle r, et ainsi de suite; soit $\frac{AP''}{R} = 2\varphi_3$, $\frac{AP'''}{R} = 2\varphi_4$, ..., nous aurons les formules

$$(5)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\varphi_2} d\varpi - \int_0^{\varphi_1} d\varpi = \int_0^{\mu} d\varpi, \\ \displaystyle\int_0^{\varphi_3} d\varpi - \int_0^{\varphi_2} d\varpi = \int_0^{\mu} d\varpi, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \displaystyle\int_0^{\varphi_n} d\varpi - \int_0^{\varphi_{n-1}} d\varpi = \int_0^{\mu} d\varpi \end{cases}$$

et, en ajoutant,

$$(6)\qquad \int_0^{\varphi_n} d\varpi - \int_0^{\varphi_1} d\varpi = (n-1)\int_0^{\mu} d\varpi$$

ou encore

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_n} d\varpi = \text{const.}$$

Supposons que le polygone PP′P″... se ferme : alors on aura, par exemple, $2\varphi_n = 2\varphi_1 + 2p\pi$, p désignant un nombre entier ou $\varphi_n = \varphi_1 + p\pi$; la formule précédente donnera alors

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_1+p\pi} d\varpi = \text{const.} = \int_0^{p\pi} d\varpi.$$

La valeur de l'intégrale $\int_{\varphi_1}^{\varphi_1+p\pi} d\varpi$ ne dépend pas de φ_1; la condition pour que le polygone se ferme ne dépend donc pas de φ_1. Donc, si ce polygone se ferme pour une position particulière du point P, il se fermera quel que soit ce point. C'est en cela que consiste le théorème de Poncelet. Il peut s'énoncer comme il suit :

Si un polygone de n côtés peut être à la fois inscrit et circonscrit à deux cercles, il existera une infinité de polygones jouissant de la même propriété.

Ce théorème est évidemment projectif, et il subsiste, par conséquent, quand aux deux cercles on substitue deux coniques quelconques.

Le théorème de Poncelet est lui-même un cas particulier d'un autre théorème beaucoup plus général également trouvé par Poncelet, et que l'on peut énoncer ainsi :

Si les divers côtés d'un polygone touchent une conique et que tous ses sommets moins un décrivent une autre conique, le sommet libre décrit une conique (voir Chap. VII, § 6).

XII. — Intégration de l'équation $dy = \dfrac{dx}{\sqrt{A + Bx^2 + Cx^4}}$.

En cherchant les équations différentielles auxquelles satisfont $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, ..., on trouve que

$$(1)\qquad \text{Si } y = \operatorname{sn} x, \ \ldots, \ \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)},$$

$$(2)\qquad y = \operatorname{cn} x, \ \ldots, \ \frac{dy}{dx} = -k'\sqrt{(1-y^2)\left(1+\frac{k^2}{k'^2}y^2\right)},$$

$$(3)\qquad y = \operatorname{dn} x, \ \ldots, \ \frac{dy}{dx} = -k'\sqrt{(1-y^2)\left(\frac{y^2}{k'^2}-1\right)},$$

$$(4)\qquad y = \operatorname{tn} x, \ \ldots, \ \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1+y^2)(1+k'^2y^2)},$$

$$(5)\qquad y = \frac{1}{\operatorname{sn} x}, \ \ldots, \ \frac{dy}{dx} = -k\sqrt{(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{k^2}\right)},$$

$$(6)\qquad y = \frac{1}{\operatorname{cn} x}, \ \ldots, \ \frac{dy}{dx} = k\sqrt{(y^2-1)\left(1+\frac{k'^2}{k^2}y^2\right)},$$

$$(7)\qquad y = \frac{1}{\operatorname{dn} x}, \ \ldots, \ \frac{dy}{dx} = \sqrt{(y^2-1)(1-k'^2y^2)},$$

$$(8)\qquad y = \frac{1}{\operatorname{tn} x}, \ \ldots, \ \frac{dy}{dx} = -k'\sqrt{(1+y^2)\left(1+\frac{y^2}{k'^2}\right)},$$

Ceci posé, s'il s'agit d'intégrer l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(A+By^2)(A'+B'y^2)},$$

on la ramènera à l'un des types précédents et l'on en aura immédiatement l'intégrale; ainsi, par exemple, si A, A′, B, B′ > 0, on écrira

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{AA'}\sqrt{\left(1+\frac{By^2}{A}\right)\left(1+\frac{B'y^2}{A'}\right)},$$

et l'on posera

$$y\sqrt{\frac{B}{A}} = z;$$

on aura alors

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\mathrm{BA}'}\sqrt{(1+z^2)\left(1+\frac{\mathrm{B}'\mathrm{A}}{\mathrm{BA}'}z^2\right)}.$$

Supposons, pour fixer les idées, $\frac{\mathrm{B}'\mathrm{A}}{\mathrm{BA}'} < 1$; on le posera égal à k'^2, et l'on aura

$$\frac{dz}{d(x\sqrt{\mathrm{BA}'})} = \sqrt{(1+z^2)(1+k'^2 z^2)};$$

par suite, en négligeant une constante,

$$z = \mathrm{tn}(x\sqrt{\mathrm{BA}'}), \qquad y = \sqrt{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}}\,\mathrm{tn}(x\sqrt{\mathrm{BA}'}).$$

Les quelques difficultés qui pourraient subsister disparaîtront quand on aura lu le § 26 du Chapitre suivant. Dans ce paragraphe, on verra comment on peut mettre sous la forme $a+bi$ les fonctions elliptiques dont la variable est imaginaire.

CHAPITRE VIII.

THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES ET DES FONCTIONS AUXILIAIRES.

I. — Introduction.

L'étude des intégrales elliptiques nous a révélé l'existence des fonctions monodromes, monogènes et doublement périodiques. Lorsqu'une fonction possède deux périodes et qu'elle est monodrome et monogène, elle jouit par cela même d'une foule de propriétés curieuses qui en facilitent considérablement l'étude; ce caractère de double périodicité fait que la fonction en quelque sorte est condensée dans l'un des parallélogrammes des périodes, et il suffit de l'étudier dans cette portion finie du plan. Nous allons donc nous proposer de résoudre cette question très générale :

Quelles sont les fonctions doublement périodiques monodromes et monogènes, et quelles sont les propriétés générales communes à toutes ces fonctions.

En nous plaçant à ce point de vue très élevé, nous rencontrerons les fonctions elliptiques et nous verrons leurs propriétés se dérouler avec une netteté merveilleuse. Nous supposerons une fois pour toutes que les fonctions dont nous aurons à nous occuper n'ont pas de points essentiels à distance finie.

II. — Premier théorème d'Arithmétique.

Étant donnés deux nombres quelconques a_1 et a_2, on peut toujours trouver des entiers m_1 et m_2, tels que

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 < \varepsilon,$$

ε *désignant un nombre donné aussi petit que l'on veut, mais fixe.*

En effet, divisons a_1 par a_2, soient μ_1 le quotient et a_3 le reste, moindre en valeur absolue ou tout au plus égal à $\frac{a_2}{2}$; divisons a_2 par a_3, soient μ_2 le quotient et a_4 le reste, moindre en valeur absolue ou tout au plus égal à $\frac{a_3}{2}$, etc.; on aura

$$\begin{aligned} a_1 &= \mu_1 a_2 + a_3, \\ a_2 &= \mu_2 a_3 + a_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n-1} &= \mu_{n-1} a_n + a_{n+1}; \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en éliminant $a_3, a_4, \ldots, a_n$,

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 = a_{n+1},$$

m_1 et m_2 désignant deux entiers; or $a_3 < \frac{a_2}{2}$, $a_4 < \frac{a_3}{2}$, ..., donc $a_3 < \frac{a_2}{2}$, $a_4 < \frac{a_2}{4}$, ..., $a_{n+1} < \frac{a_2}{2^{n-1}}$; a_{n+1} peut donc être supposé aussi petit que l'on veut, ce qui démontre le théorème énoncé.

Dans les Traités d'Algèbre on démontre aussi ce théorème au moyen de la théorie des fractions continues.

III. — Second théorème d'Arithmétique.

Si l'on considère les quantités

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_{n+1} &= a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_n m_n, \\ b_{n+1} &= b_1 m_1 + b_2 m_2 + \ldots + b_n m_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_{n+1} &= l_1 m_1 + l_2 m_2 + \ldots + l_n m_n, \end{aligned} \right.$$

au nombre de $n-1$, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, l_1, \ldots, l_n$ *désignant* $n(n-1)$ *quantités quelconques, on pourra toujours choisir les entiers* $m_1, m_2, \ldots, m_n$, *de telle sorte que l'on ait à la fois en valeur absolue*

$$a_{n+1}, \quad b_{n+1}, \quad \ldots, \quad l_{n+1} < \varepsilon.$$

Pour le démontrer, nous observerons que le théorème énoncé vient d'être établi en supposant les quantités a_{n+1}, b_{n+1}, ... réduites à une seule. Supposons donc le théorème démontré pour toutes les valeurs de n inférieures à un entier donné que nous appellerons n, et cherchons à l'établir pour le nombre n lui-même. Comme il a lieu pour $n = 1$, il sera démontré d'une façon générale.

L'une des quantités l au moins devant être différente de zéro pour que le théorème ait lieu, supposons $l_n \gtrless 0$: nous tirerons du système (1), en éliminant m_n,

$$a_{n+1} - l_{n+1}\frac{a_n}{l_n} = \frac{1}{l_n}[(a_1 l_n - l_1 a_n) m_1 + \ldots + (a_{n-1} l_n - l_{n-1} a_n) m_{n-1}],$$

$$b_{n+1} - l_{n+1}\frac{b_n}{l_n} = \frac{1}{l_n}[(b_1 l_n - l_1 b_n) m_1 + \ldots + (b_{n-1} l_n - l_{n-1} b_n) m_{n-1}],$$

. . . .

D'après notre hypothèse, on pourra toujours choisir les $n - 1$ nombres entiers $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$, de manière à satisfaire aux $n - 2$ conditions

$$(2) \qquad a_{n+1} - l_{n+1}\frac{a_n}{l_n}, \quad b_{n+1} - l_{n+1}\frac{b_n}{l_n}, \quad \ldots < \delta,$$

δ désignant un nombre aussi petit que l'on voudra; d'un autre côté, on pourra, quand cela sera fait, déterminer m_n de manière que l'on ait (en valeur absolue toujours)

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} \quad \text{ou} \quad \frac{l_1}{l_n} m_1 + \frac{l_2}{l_n} m_2 + \ldots + \frac{l_{n-1}}{l_n} m_{n-1} + m_n < \frac{1}{2};$$

il suffit pour cela de prendre pour m_n l'entier qui se rapproche le plus de

$$-\left(\frac{l_1}{l_n} m_1 + \frac{l_2}{l_n} m_2 + \ldots + \frac{l_{n-1}}{l_n} m_{n-1}\right);$$

mais alors les formules (2) donneront

$$a_{n+1} - \frac{\theta}{2} a_n, \quad b_{n+1} - \frac{\theta'}{2} b_n, \quad \ldots < \delta,$$

$\theta, \theta', \ldots$ désignant des nombres compris entre -1 et $+1$; on en déduira

$$a_{n+1} < \delta + \theta \frac{a_n}{2}, \quad b_{n+1} < \delta + \theta' \frac{b_n}{2}, \quad \ldots.$$

Mais, δ étant aussi petit que l'on veut, on voit que l'on pourra toujours faire en sorte que l'on ait, sinon

$$a_{n+1} < \frac{a_n}{2}, \quad b_{n+1} < \frac{b_n}{2}, \quad \ldots,$$

au moins

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{b_n}{2}, \quad \ldots$$

ou, ce qui suffirait pour notre objet,

$$a_{n+1} < \frac{2}{3} a_n, \quad b_{n+1} < \frac{2}{3} b_n, \quad \ldots,$$

si l'on voulait ne pas accorder cette dernière conséquence.

Ceci posé, on pourra toujours déterminer les nombres entiers $m'_2, m'_3, \ldots, m'_{n+1}$, de telle sorte que, si l'on fait

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= m'_2 a_2 + m'_3 a_3 + \ldots + m'_n a_n + m'_{n+1} a_{n+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_{n+2} &= m'_2 l_2 + m'_3 l_3 + \ldots + m'_n l_n + m'_{n+1} l_{n+1}, \end{aligned}$$

on ait $a_{n+2} < \frac{2}{3} a_{n+1}$, $b_{n+2} < \frac{2}{3} a_{n+2}$, $\ldots$; cela fait, on pourra, en posant

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= m''_3 a_3 + \ldots + m''_{n+2} a_{n+2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_{n+3} &= m''_3 l_3 + \ldots + m''_{n+3} l_{n+3}, \end{aligned}$$

faire en sorte que $a_{n+3} < \frac{2}{3} a_{n+2}$, $b_{n+3} < \frac{2}{3} b_{n+2}$, $\ldots$, et ainsi de suite. Or les nombres $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots$ décroissent plus rapidement que les termes de la progression dont la raison serait $\frac{2}{3}$; ils tendent donc vers zéro, et l'on peut poser pour i suffisamment grand

$$a_i, \quad b_i, \quad \ldots, \quad l_i < \varepsilon.$$

Or a_{n+1} est une fonction linéaire à coefficients entiers de a_1, $a_2, \ldots, a_n$; de même a_{n+2} est une fonction linéaire à coefficients entiers de $a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$, c'est-à-dire de a_1, $a_2, \ldots, a_n$, et ainsi de suite; on peut donc poser

$$\begin{aligned} a_i &= \mathrm{M}_1 a_1 + \mathrm{M}_2 a_2 + \ldots + \mathrm{M}_n a_n, \\ b_i &= \mathrm{M}_1 b_1 + \mathrm{M}_2 b_2 + \ldots + \mathrm{M}_n b_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_i &= \mathrm{M}_1 l_1 + \mathrm{M}_2 l_2 + \ldots + \mathrm{M}_n l_n, \end{aligned}$$

$\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_n$ désignant des entiers et a_i, b_i, ... des quantités moindres que ε, ce qui achève la démonstration du théorème énoncé.

Mais, avant de tirer des conséquences de notre théorème, faisons observer qu'il pourra arriver que l'on ait à la fois plusieurs relations, telles que

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_n a_n = 0, \\ &m_1 b_1 + m_2 b_2 + \ldots + m_n b_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned} \right.$$

il est facile de prouver alors que $a_1, a_2, \ldots a_n$, s'expriment en fonctions linéaires à coefficients entiers de $n-1$ autres variables; pour faire cette démonstration, on pourra supposer les a réels ou imaginaires de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$.

Soient en effet m'_2 le plus grand commun diviseur de m_1 et de m_2 et μ_1, μ_2 les quotients de m_1 et m_2 par m'_2 : on pourra remplacer la première formule (3) par

$$(\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2) m'_2 + \ldots + m_n a_n = 0$$

ou bien, en posant

$$(4) \qquad \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 = a'_2,$$

par

$$(5) \qquad m'_2 a'_2 + m_3 a_3 + \ldots m_n a_n = 0.$$

D'ailleurs, μ_1 et μ_2 étant premiers entre eux, on pourra toujours trouver deux nombres entiers ν_1 et ν_2, tels que

$$\mu_1 \nu_2 - \nu_1 \mu_2 = 1,$$

et, en posant

$$\nu_1 a_1 + \nu_2 a_2 = a''_1,$$

les valeurs de a_1 et a_2 tirées de cette équation et de (4) seront des fonctions linéaires à coefficients entiers de a''_1 et a'_2; mais, par un procédé analogue, la formule (5) se ramènera à la forme

$$m'_3 a'_3 + m_4 a_4 + \ldots + m_n a_n = 0.$$

D'ailleurs a'_2 et a_3 seront fonctions linéaires et à coefficients entiers de a'_3 et d'une autre quantité a''_2; or a_1 et a_2 étaient fonctions de a''_1 et de a'_2, linéaires et à coefficients entiers, donc a_1, a_2 et a_3 sont fonctions de même nature de a''_1, a''_2 et a'_3. En continuant ainsi, on arrive à la formule

$$m'_n a'_n = 0,$$

et $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ s'expriment en fonctions linéaires et à coefficients entiers de $a''_1, a''_2, \ldots, a''_{n-1}$ et de a'_n. Or, a'_n étant nul, il en résulte que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des fonctions linéaires et à coefficients entiers de $a''_1, a''_2, \ldots, a''_{n-1}$ et, par suite, ces quantités ne sont pas distinctes.

D'ailleurs il est clair que, si l'on a

$$a_i = f_i(a''_1, a''_2, \ldots, a''_{n-1}),$$

on aura également, en appelant $b''_1, b''_2, \ldots, b''_{n-1}, \ldots$ des nombres convenablement choisis,

$$b_i = f_i(b''_1, b''_2, \ldots, b''_{n-1}),$$
$$c_i = f_i(c''_1, c''_2, \ldots, c''_{n-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

C. Q. F. D.

IV. — Ce que l'on doit entendre par périodes distinctes.

Quand une fonction admet une période, elle en admet une infinité qui ne doivent pas être considérées comme distinctes.

Supposons que $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ soient des périodes de $f(z)$, il est clair que l'on aura

$$f(m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_n\omega_n + z) = f(z),$$

si $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont entiers, et que

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_n\omega_n$$

sera encore une période.

On dit que des périodes $\omega_1, \omega_2, \ldots$ sont *distinctes* quand il n'existe pas entre elles de relation homogène, linéaire et à coefficients entiers.

Supposons qu'entre les périodes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ d'une fonction $f(z)$ il existe la relation

$$(1) \qquad m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_n\omega_n = 0,$$

$m_1, m_2, \ldots$ désignant des entiers non divisibles par un même nombre; soit m_1 le plus petit d'entre eux pris en valeur absolue. Soient $q_2, q_3, \ldots$ et $r_2, r_3, \ldots$ les quotients et les restes de la division de $m_2, m_3, \ldots$ par m_1, (1) pourra s'écrire

$$m_1\omega_1 + (m_1 q_2 + r_2)\omega_2 + (m_1 q_3 + r_3)\omega_3 + \ldots = 0$$

ou

$$(2) \qquad m_1\varpi_1 + r_2\omega_2 + \ldots + r_n\omega_n = 0,$$

en posant

$$(3) \qquad \varpi_1 = \omega_1 + q_2\omega_2 + \ldots + q_n\omega_n.$$

ϖ_1 désignera alors une nouvelle période, et il est clair que ω_1 est une fonction linéaire des nouvelles périodes $\varpi_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$ à coefficients entiers, en vertu de (3). Traitons l'équation (2) comme (1), nous en déduirons une relation plus simple que (2), comme (2) était plus simple que (1), entre de nouvelles périodes $\varpi_1, \varpi_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$, et ω_2 sera encore fonction linéaire, comme ω_1, de ces nouvelles périodes, et ainsi de suite. Mais les équations telles que (2) vont toujours en se simplifiant; les coefficients finissent par s'évanouir, et l'on

voit que, finalement, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sont des fonctions linéaires, homogènes et à coefficients entiers d'une même période. A ce point de vue, les périodes considérées ne sont donc pas distinctes.

V. — Impossibilité de deux périodes avec un rapport réel.

Une fonction monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan ne saurait posséder deux périodes distinctes avec un rapport réel.

En effet, soient ω et $a\omega$ deux périodes de la fonction $f(z)$ ayant le rapport réel a : alors, m_1 et m_2 désignant deux entiers, $m_1\omega + m_2 a\omega$ sera une nouvelle période; or, a ne pouvant être commensurable, sans quoi ω et $a\omega$ ne seraient pas distinctes, car il existerait entre ω et $a\omega$ une relation linéaire à coefficients entiers, on pourra toujours choisir les entiers m_1 et m_2 de telle sorte que

$$m_1 + m_2 a < \varepsilon$$

et

$$\text{mod}(m_1\omega + m_2 a\omega) < \text{mod}\,\varepsilon\omega;$$

la période $m_1\omega + m_2 a\omega$ peut donc être prise aussi voisine de zéro que l'on veut, et alors, en l'appelant α, on aurait

$$f(z) = f(z+\alpha) = f(z+2\alpha) = \ldots = f(z+n\alpha),$$

z désignant un point quelconque.

Or, si la fonction $f(z)$ est synectique autour du point z, dans un contour fini tracé autour du point z, l'équation

$$f(z) = f(z+x)$$

aurait une infinité de racines, $x = \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$, ce qui est impossible.

VI. — Impossibilité de trois périodes.

Théorème. — *Une fonction monodrome et monogène ne saurait avoir plus de deux périodes distinctes.*

En effet, soient ω_1, ω_2, ω_3 trois périodes distinctes de la fonction $f(z)$: alors, m_1, m_2, m_3 désignant trois entiers quelconques,

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3$$

sera une nouvelle période, car cette quantité ne saurait s'annuler, ω_1, ω_2, ω_3 étant des périodes distinctes; soient

$$\omega_1 = a_1 + b_1\sqrt{-1}, \qquad \omega_2 = a_2 + b_2\sqrt{-1}, \qquad \omega_3 = a_3 + b_3\sqrt{-1},$$

$$a_4 = m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3,$$
$$b_4 = m_1 b_1 + m_2 b_2 + m_3 b_3;$$

la nouvelle période sera égale à $a_4 + b_4\sqrt{-1}$. Or on peut toujours rendre (p. 218) a_4 et b_4 moindres qu'une quantité donnée, en choisissant convenablement m_1, m_2, m_3; le module de la nouvelle période pouvant être alors pris aussi petit que l'on veut; en désignant cette période par α, on aurait $f(z) = f(z+\alpha) = f(z+2\alpha) = \ldots$ et l'équation $f(z) = f(z+x)$ aurait dans le voisinage du point z une infinité de racines $x = \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$. La fonction $f(z)$ ne saurait donc être synectique autour du point z.

C. Q. F. D.

Nous verrons, au contraire, qu'une fonction non monodrome peut posséder plus de deux périodes distinctes et même un nombre quelconque de périodes.

VII. — Périodes élémentaires.

Étant donnée une fonction monodrome et monogène doublement périodique $f(z)$ aux périodes ω et ϖ, on peut toujours supposer qu'il n'existe pas de période Ω qui ne soit de la forme $m\omega + n\varpi$, m et n désignant deux entiers, car Ω ne saurait être distincte de ω et ϖ; donc il existe des périodes telles que toutes les autres soient fonctions linéaires et à coefficients entiers de celles-ci. De telles périodes sont ce que l'on appelle des *périodes élémentaires*.

Il existe une infinité de systèmes de périodes élémentaires :

en effet, soient ω et ϖ un système de périodes élémentaires; deux autres périodes

$$\omega' = a\omega + b\varpi,$$
$$\varpi' = a'\omega + b'\varpi,$$

a, b, a', b' désignant des entiers, formeront un système élémentaire, s'il est possible d'exprimer ω et ϖ en fonction linéaire et à coefficients entiers de ω' et ϖ'. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $ab' - ba' = \pm 1$, car $ab' - ba'$ ne saurait diviser à la fois a, b, a', b'; en effet, a, b, a', b' ayant un facteur commun α, $\frac{\omega'}{\alpha}$ et $\frac{\varpi'}{\alpha}$ seraient des périodes qui ne pourraient pas s'exprimer sous forme linéaire à coefficients entiers à l'aide de ω' et ϖ'.

Théorème I. — *Deux parallélogrammes élémentaires, c'est-à-dire ayant pour côtés des périodes élémentaires, sont équivalents.*

En effet, soient $x + y\sqrt{-1}$ et $x' + y'\sqrt{-1}$ deux périodes élémentaires,

$$a(x + y\sqrt{-1}) + b(x' + y'\sqrt{-1})$$

et

$$a'(x + y\sqrt{-1}) + b'(x' + y'\sqrt{-1})$$

deux autres périodes élémentaires. L'aire du parallélogramme de ces dernières périodes est

$$\pm \begin{vmatrix} ax + bx' & ay + by' \\ a'x + b'x' & a'y + b'y' \end{vmatrix}$$
$$= \pm \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix},$$

ce qui démontre le théorème.

Théorème II. — *Dans deux parallélogrammes élémentaires, la fonction $f(z)$ passe le même nombre de fois par une valeur donnée.*

Le théorème est évident pour deux parallélogrammes élé-

mentaires ayant un côté commun, vu qu'ils se composent d'une partie commune et de deux parties égales, dans l'intérieur desquelles la fonction acquiert manifestement des valeurs identiques. Pour démontrer le théorème, il suffira d'établir que l'on peut passer du parallélogramme ayant pour côtés ω et ω_1 au parallélogramme ayant pour côtés ϖ et ϖ_1, au moyen de parallélogrammes intermédiaires ayant chacun un côté commun avec celui qui le précède et avec celui qui le suit.

Soient donc ω et ω_1 un système de périodes équivalent au système ϖ et ϖ_1, en sorte que

$$\begin{aligned} \varpi &= a_1\omega + a\omega_1,\\ \varpi_1 &= b_1\omega + b\omega_1,\\ ab_1 - ba_1 &= \pm 1. \end{aligned}$$

Pratiquons sur a et a_1 l'opération du plus grand commun diviseur et posons

$$\begin{array}{llll} a = a_1q_1 + a_2, & a_1 = a_2q_2 + a_3, & \ldots, & a_{n-1} = a_nq_n + a_{n+1},\\ b = b_1q_1 + b_2, & b_1 = b_2q_2 + b_3, & \ldots, & b_{n-1} = b_nq_n + b_{n+1}, \end{array}$$

nous aurons

$$\begin{array}{lll} \varpi = a_1\omega_2 + a_2\omega_1, & \text{en posant} & \omega_2 = \omega + q_1\omega_1,\\ \varpi_1 = b_1\omega_2 + b_2\omega_1, & & \\ \varpi = a_2\omega_3 + a_3\omega_2, & & \omega_3 = \omega_1 + q_2\omega_2,\\ \varpi_1 = b_2\omega_3 + b_3\omega_2, & & \\ \varpi = a_3\omega_4 + a_4\omega_3, & & \omega_4 = \omega_2 + q_3\omega_3,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & & \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \varpi = a_n\omega_{n+1} + a_{n+1}\omega_n, & & \omega_{n+1} = \omega_{n-1} + q_n\omega_n,\\ \varpi_1 = b_n\omega_{n+1} + b_{n+1}\omega_n. & & \end{array}$$

Or l'opération du plus grand commun diviseur conduisant à un reste nul, on peut supposer $a_{n+1} = 0$. De plus, a et a_1 étant premiers entre eux, sans quoi l'on n'aurait pas $ab_1 - ba_1 = \pm 1$, il faut que $a_n = 1$; enfin on a

$$ab_1 - ba_1 = -(a_1b_2 - b_1a_2) = +(a_2b_3 - b_2a_3) = \ldots;$$

donc $b_{n+1} = 1$ en valeur absolue, et l'on voit que l'on aura

$$\varpi = \omega_{n+1}, \qquad \varpi_1 = \pm \omega_n + b_n \omega_{n+1},$$

$$\omega_{n+1} = \omega_{n-1} + q_n \omega_n, \quad \ldots, \quad \omega_2 = \omega + q_1 \omega_1,$$

ce qui démontre le théorème.

VIII. — Propriétés générales des fonctions à deux périodes.

Avant de nous inquiéter de savoir s'il existe des fonctions monodromes et monogènes possédant deux périodes, nous étudierons *a priori* les propriétés dont doivent jouir ces fonctions, si elles existent; ces propriétés, connues, nous guideront dans la recherche des fonctions en question.

Théorème I. — *L'intégrale d'une fonction doublement périodique le long d'un parallélogramme des périodes est nulle* (1).

En effet, le long des côtés opposés du parallélogramme, la fonction reprend les mêmes valeurs; mais, comme ces côtés sont parcourus en sens inverse, les intégrales partielles relatives à ces côtés se détruisent. C. Q. F. D.

Ce théorème fondamental est de M. Hermite.

Théorème II. — *Une fonction doublement périodique a au moins deux infinis dans chaque parallélogramme des périodes.*

En effet, en vertu du théorème précédent, son résidu est nul, ce qui ne pourrait avoir lieu si elle ne possédait qu'un infini.

Théorème III. — *Dans chaque parallélogramme la fonc-*

---

(1) Il ne sera question dans ce qui va suivre que de fonctions monodromes et monogènes, ce qui nous dispensera de répéter sans cesse ces adjectifs; nous les supposerons également sans points essentiels à distance finie.

tion doublement périodique $f(z)$ passe par tous les états de valeurs, autant de fois qu'elle passe par l'infini.

En effet, le résidu étant pris à l'intérieur du parallélogramme, on a

$$\mathcal{E}\frac{f'(z)}{f(z)} = n - \nu,$$

n désignant le nombre des zéros et ν celui des infinis de $f(z)$; mais, en vertu du théorème I,

$$\mathcal{E}\frac{f'(z)}{f(z)} = 0,$$

car $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est doublement périodique, donc $n = \nu$; mais la fonction doublement périodique $f(z) - a$ a les mêmes infinis que $f(z)$; donc le nombre de ses zéros est n, donc enfin $f(z)$ passe n fois par la valeur a.

Nous appellerons *ordre d'une fonction doublement périodique* le nombre d'infinis qu'elle possède dans un parallélogramme des périodes.

Théorème IV. — *La somme des valeurs de la variable z pour lesquelles une fonction doublement périodique prend une même valeur dans un même parallélogramme des périodes est constante.*

En effet, considérons les valeurs de z pour lesquelles on a

$$f(z) = a \qquad \text{ou} \qquad f(z) - a = 0,$$

$f(z)$ désignant une fonction à deux périodes, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{zf'(z)}{f(z)-a}\,dz$$

est égale à la somme des zéros diminués de la somme des infinis de $f(z) - a$; soient donc σ la somme des infinis de $f(z)$, et s la somme des valeurs de z pour lesquelles $f(z) = a$, on a

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{zf'(z)\,dz}{f(z)-a} = s - \sigma.$$

Soient ω et ω' les périodes de $f(z)$, l'intégrale précédente étant prise le long d'un parallélogramme de côtés ω, ω', nous pourrons écrire, en appelant z_0 un point quelconque,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left\{\int_{z_0}^{z_0+\omega}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)-a}-\frac{(z+\omega')f'(z+\omega')}{f(z+\omega')-a}\right]dz\right.$$
$$\left.+\int_{z_0}^{z_0+\omega'}\left[\frac{(z+\omega)f'(z+\omega)}{f(z+\omega)}-\frac{zf'(z)}{f(z)-a}\right]dz\right\}=s-\sigma;$$

mais $f(z+\omega)=f(z)$, $f(z+\omega')=f(z)$, ..., donc

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left[-\int_{z_0}^{z_0+\omega}\omega'\frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz+\int_{z_0}^{z_0+\omega'}\omega\frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz\right]=s-\sigma$$

ou

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left[\omega\log\frac{f(z_0+\omega')-a}{f(z_0)-a}-\omega'\log\frac{f(z_0+\omega)-a}{f(z_0)-a}\right]=s-\sigma;$$

mais $f(z_0+\omega')=f(z_0)$, donc

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}(\omega\log 1-\omega'\log 1)=s-\sigma;$$

mais $\log 1$ est de la forme $2m\pi\sqrt{-1}$, donc

$$s-\sigma=m\omega+m'\omega',$$

m et m' désignant deux entiers. On a donc

$$s\equiv\sigma.$$

Le signe $\equiv$ sera désormais employé pour exprimer une égalité dans laquelle on néglige des multiples des périodes.

Corollaire. — La somme des zéros est donc égale à celle des infinis quand on néglige les multiples des périodes.

IX. — Des fonctions auxiliaires.

Nous allons maintenant chercher à former de toutes pièces des fonctions possédant deux périodes; de telles fonctions ont

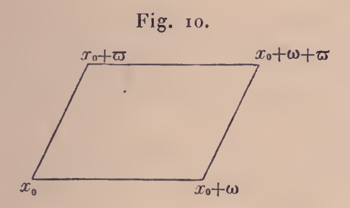
leurs zéros et leurs infinis régulièrement distribués dans le plan, et on peut les considérer comme des quotients de fonctions ayant leurs zéros régulièrement distribués, mais ne devenant infinies que pour des valeurs infinies de la variable (t. III, p. 371). Voyons si de pareilles fonctions existent et cherchons à les former.

Soit $\theta(x)$ une fonction toujours synectique, ayant ses zéros régulièrement distribués dans le plan, comme ceux d'une fonction à deux périodes ω, ϖ. Si l'on déplace parallèlement à lui-même le parallélogramme des périodes, il devra toujours contenir le même nombre de zéros et, par suite, l'intégrale suivante prise le long du parallélogramme en question

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\theta'(x)}{\theta(x)}\,dx$$

devra être toujours égale au même nombre entier quel que soit le point de z_0 par lequel on fera passer l'un des sommets de ce parallélogramme. Intégrons donc le long du parallélo-

Fig. 10.



gramme ayant pour sommets x_0, $x_0+\omega$, $x_0+\omega+\varpi$, $x_0+\varpi$ (*fig.* 10) et écrivons que le résultat est égal à l'entier i, quel que soit x_0 ; nous aurons

$$\begin{aligned}2i\pi\sqrt{-1} = &\int_{x_0}^{x_0+\omega}\left[\frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \frac{\theta'(x+\varpi)}{\theta(x+\varpi)}\right]dx\\ &-\int_{x_0}^{x_0+\varpi}\left[\frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \frac{\theta'(x+\omega)}{\theta(x+\omega)}\right]dx.\end{aligned}$$

On satisfera à cette équation en posant

$$\frac{\theta'(x+\omega)}{\theta(x+\omega)} - \frac{\theta'(x)}{\theta(x)} = a, \qquad \frac{\theta'(x+\varpi)}{\theta(x+\varpi)} - \frac{\theta'(x)}{\theta(x)} = b,$$

les constantes a et b satisfaisant à la relation

$$(1) \qquad a\varpi - b\omega = 2\pi i\sqrt{-1};$$

si l'on intègre les équations précédentes et si l'on passe des logarithmes aux nombres, on trouve

$$(2) \qquad \begin{cases} \theta(x+\omega) = \theta(x)e^{ax+a'}, \\ \theta(x+\varpi) = \theta(x)e^{bx+b'}, \end{cases}$$

a' et b' désignant de nouvelles constantes. Les fonctions qui satisfont aux formules (1) et (2) et qui ont leurs zéros distribués comme ceux des fonctions à deux périodes sont ce que l'on appelle des *fonctions auxiliaires* [1].

Si l'on connaissait des fonctions θ et θ_1 satisfaisant à ces formules, il est clair que $\frac{\theta}{\theta_1}$ serait doublement périodique et posséderait les périodes ω et ϖ; occupons-nous donc des fonctions auxiliaires.

Quand on change x en $x+\omega$, la fonction e^{Ax^2+Bx+C} se trouve multipliée comme la fonction θ par une exponentielle dont l'exposant $2A\omega x + B\omega + A\omega^2$ est linéaire; si donc on pose

$$2A\omega + a = 0, \qquad A\omega^2 + B\omega + a' = 0$$

ou

$$(3) \qquad A = -\frac{a}{2\omega}, \qquad B = \frac{a}{2} - \frac{a'}{\omega},$$

la fonction

$$\theta(x)e^{Ax^2+Bx+C} = f(x)$$

sera telle que

$$f(x+\omega) = \theta(x+\omega)e^{A(x+\omega)^2+B(x+\omega)+C}$$

ou

$$f(x+\omega) = \theta(x)e^{Ax^2+Bx+C} = f(x).$$

---

(1) M. Hermite appelle aussi ces fonctions doublement périodiques de troisième espèce.

On a ensuite

$$f(x+\varpi)=\theta(x+\varpi)e^{A(x+\varpi)^2+B(x+\varpi)+C}$$

ou, en vertu de la seconde équation (2),

$$f(x+\varpi)=\theta(x)e^{Ax^2+Bx+C}\times e^{gx+h}=f(x)e^{gx+h},$$

g et h désignant les constantes

$$g=2A\varpi+b, \qquad h=A\varpi^2+B\varpi+b'.$$

Remplaçant b par sa valeur tirée de (1) et A, B par leurs valeurs (3), on trouve

$$g=-\frac{2i\pi\sqrt{-1}}{\omega};$$

la quantité h dépend de la constante arbitraire b', si bien que l'on a

$$(4) \qquad \begin{cases} f(x+\omega)=f(x), \\ f(x+\varpi)=f(x)e^{-\frac{2i\pi\sqrt{-1}}{\omega}x+h}. \end{cases}$$

On voit donc que l'étude des fonctions θ est ramenée à celle des fonctions Θ satisfaisant aux relations

$$(5) \qquad \begin{cases} \Theta(x+\omega)=\Theta(x), \\ \Theta(x+\varpi)=\Theta(x)e^{-\frac{2i\pi\sqrt{-1}}{\omega}(x+c)}, \end{cases}$$

qui ne diffèrent de (4) que parce que l'on a mis la constante h sous la forme $-\dfrac{2i\pi\sqrt{-1}}{\omega}c$.

L'étude de la fonction Θ sera plus simple que celle de la fonction θ, parce qu'elle renferme moins de paramètres, et aussi, surtout, parce qu'elle possède déjà une période ω.

Deux fonctions auxiliaires qui ont les mêmes zéros ne peuvent différer que par un facteur de la forme e^{Ax^2+Bx+C} *dans lequel* A, B, C *sont des constantes.*

Soient, en effet, $\theta(x)$ et $\theta_1(x)$ les deux fonctions en question :

si elles ont les mêmes zéros, elles ont aussi les mêmes périodes ω, ϖ, et l'on a

$$\begin{aligned}\theta\ (x+\omega) &= \theta\ (x)e^{ax+b}\\ \theta\ (x+\varpi) &= \theta\ (x)e^{a'x+b'}\\ \theta_1(x+\omega) &= \theta_1(x)e^{\alpha x+\beta}\\ \theta_1(x+\varpi) &= \theta_1(x)e^{\alpha' x+\beta'};\end{aligned}$$

on conclut de la première

$$\frac{d\log\theta(x+\omega)}{dx} = \frac{d\log\theta(x)}{dx}+a,$$

$$\frac{d^2\log\theta(x+\omega)}{dx^2} = \frac{d^2\log\theta(x)}{dx^2};$$

et les fonctions $\frac{d^2\log\theta(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2\log\theta_1(x)}{dx^2}$ sont doublement périodiques, leur différence est donc doublement périodique; mais $\theta(x)$ et $\theta_1(x)$ ayant les mêmes zéros et pas d'infinis ne peuvent différer que par un facteur exponentiel $e^{\varphi(x)}$, où $\varphi(x)$ représente une série ordonnée suivant les puissances de x, c'est-à-dire une fonction toujours finie, excepté pour $x=\infty$.

Or la différence

$$\frac{d^2\log\theta(x)}{dx^2} - \frac{d^2\log\theta_1(x)}{dx^2}$$

est égale à $\varphi''(x)$; cette fonction est doublement périodique comme $\varphi(x)$ et a ses infinis, c'est-à-dire ne devient jamais infinie; donc elle se réduit à une constante $2A$, donc $\varphi(x)$ est bien de la forme $\varphi(x) = Ax^2+Bx+C$.

C. Q. F. D.

X. — Développement des fonctions auxiliaires.

Nous voilà donc ramenés à trouver une fonction satisfaisant aux équations

(1) $$\Theta(x+\omega) = \Theta(x),$$

(2) $$\Theta(x+\varpi) = \Theta(x)e^{-\frac{2\pi i\sqrt{-1}}{\omega}(x+c)}.$$

La fonction Θ, devant être synectique dans toute l'étendue du plan et devant posséder la période ω, si on la compare à la fonction $z = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}x}$, sera une fonction synectique de celle-ci ; car, quand on se donne z, x a une infinité de valeurs de la forme $x + m\omega$, m désignant un entier; $\Theta(x) = \Theta(x + m\omega)$ n'a alors qu'une seule valeur pour chaque valeur de z et l'on pourra développer $\Theta(x)$ suivant les puissances ascendantes et descendantes de z; posons donc

$$\Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{\frac{2n\pi\sqrt{-1}}{\omega}x},$$

en faisant $A_n = e^{\frac{\varphi(n)}{\omega}2\pi\sqrt{-1}}$; on a alors

$$\Theta(x) = \sum e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}[nx+\varphi(n)]}.$$

En vertu de (2), on doit avoir

$$\sum e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}[nx+n\varpi+\varphi(n)]} = \sum e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}[nx+\varphi(n)-ix-ic]};$$

en égalant les coefficients de $e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}nx}$, on a

$$n\varpi + \varphi(n) = \varphi(n+i) - ic$$

ou

$$\varphi(n+i) = \varphi(n) + n\varpi + ic;$$

on en déduit

$$\varphi(n+2i) = \varphi(n+i) + (n+i)\varpi + ic,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\varphi(n+\mu i) = \varphi(n+\overline{\mu-1}\,i) + (n+\mu i - i)\varpi + ic,$$

d'où l'on conclut, en ajoutant,

$$\varphi(n+\mu i) = \varphi(n) + \varpi\,\frac{2n+\mu i - i}{2}\,\mu + \mu ic.$$

Ainsi, $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, ..., $\varphi(i-1)$ restent arbitraires et, en faisant $e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}\varphi(n)} = A_n$, on voit que l'on peut poser

$$(3)\quad \begin{cases} \Theta(x) = A_0\Theta_0(x) + A_1\Theta_1(x) + \ldots + A_{i-1}\Theta_{i-1}(x), \\ \Theta_n(x) = \displaystyle\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}\left[(n+\mu i)x+\mu(n\varpi+ic)+\frac{\mu(\mu-1)}{2}i\varpi\right]}. \end{cases}$$

La fonction $\Theta_n(x)$ est bien déterminée, car la série qui la représente peut toujours être supposée convergente. En effet, la racine $\mu^{\text{ième}}$ du terme général tendra vers zéro pour $\mu = \infty$, pourvu toutefois que la partie réelle de $\frac{\sqrt{-1}\varpi}{\omega}$ soit négative, ce que l'on peut toujours supposer en changeant, si l'on veut, le signe d'une période.

En résumé, les équations (1), (2) *admettent une solution renfermant i constantes arbitraires, et les fonctions* Θ *qui ont i zéros dans le parallélogramme des périodes, fonctions que nous appellerons fonctions auxiliaires d'ordre i, sont linéaires et homogènes de i d'entre elles.*

Ce théorème est encore vrai pour les fonctions θ plus générales. Soit, en effet,

$$\theta(x+\omega) = \theta(x)e^{ax+a'},$$
$$\theta(x+\varpi) = \theta(x)e^{bx+b'},$$
$$a\varpi - b\omega = 2\pi i\sqrt{-1};$$

si, pour ramener la fonction θ aux fonctions Θ, on pose

$$\theta(x) = \Theta(x)e^{Ax^2+Bx+C},$$

on trouvera

$$\theta\ (x) = A_0\theta_0(x) + A_1\theta_1(x) \ldots A_{i-1}\theta_{i-1}(x),$$
$$\theta_n(x) = \Theta_n(x)e^{Ax^2+Bx+C},$$

et par suite on voit que :

Toute fonction d'ordre i est une fonction linéaire et homogène de i d'entre elles.

Cette propriété est fondamentale.

Avant d'aller plus loin, nous ferons observer qu'il existe des fonctions d'ordre zéro et que ces fonctions sont de simples exponentielles; en effet, les fonctions d'ordre zéro doivent satisfaire aux relations

$$\begin{aligned}\theta(x) &= \Theta(x)e^{Ax^2+Bx+C},\\ \Theta(x+\omega) &= \Theta(x),\\ \Theta(x+\varpi) &= \Theta(x).\end{aligned}$$

La fonction Θ d'ordre un, restant finie dans le parallélogramme des périodes et possédant les deux périodes ω, ϖ, doit se réduire à une constante, et par suite $\theta(x)$ est de la forme

$$G e^{Ax^2+Bx+C},$$

G désignant une quantité indépendante de x.

Les fonctions Θ du premier ordre sont de la forme

$$\Theta(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}\left[\mu(x+c)+\frac{\mu(\mu-1)}{2}\varpi\right]}.$$

XI. — Sur les racines de $\theta(x) = 0$.

Considérons la fonction θ définie par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases}\theta(x+\omega) = \theta(x)e^{ax+a'},\\ \theta(x+\varpi) = \theta(x)e^{bx+b'},\end{cases}$$

$$a\varpi - b\omega = 2i\pi\sqrt{-1}.$$

La somme s des racines contenues dans un parallélogramme des périodes ω, ϖ est donnée par la formule

$$2\pi s\sqrt{-1} = \int z\,\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}\,dz,$$

l'intégrale étant prise le long du parallélogramme. Cette for-

mule peut s'écrire

$$2\pi s\sqrt{-1}=\int_0^{\omega}\left[\frac{\theta'(x)}{\theta(x)}x-\frac{\theta'(x+\varpi)}{\theta(x+\varpi)}(x+\varpi)\right]dx$$
$$+\int_0^{\varpi}\left[\frac{\theta'(x+\omega)}{\theta(x+\omega)}(x+\omega)-\frac{\theta'(x)}{\theta(x)}x\right]dx;$$

or, en vertu de (1),

$$\frac{\theta'(x+\omega)}{\theta(x+\omega)}=\frac{\theta'(x)}{\theta(x)}+a,\qquad \frac{\theta'(x+\varpi)}{\theta(x+\varpi)}=\frac{\theta'(x)}{\theta(x)}+b;$$

on a donc

$$2\pi s\sqrt{-1}=\int_0^{\varpi}\left(\frac{\theta'}{\theta}\omega+ax+a\omega\right)dx-\int_0^{\omega}\left(\frac{\theta'}{\theta}\varpi+bx+b\varpi\right)dx$$

ou bien, en intégrant,

$$(2)\quad 2\pi s\sqrt{-1}=\omega\log\frac{\theta(\varpi)}{\theta(0)}-\varpi\log\frac{\theta(\omega)}{\theta(0)}+a\frac{\varpi^2}{2}-b\frac{\omega^2}{2}+(a-b)\omega\varpi.$$

Mais

$$\log\frac{\theta(\varpi)}{\theta(0)}=b'+m\pi\sqrt{-1},$$
$$\log\frac{\theta(\omega)}{\theta(0)}=a'+n\pi\sqrt{-1},$$

m et n désignant deux entiers; la formule (2) donne alors

$$2\pi s\sqrt{-1}=\omega b'-\varpi a'+a\frac{\varpi^2}{2}-b\frac{\omega^2}{2}+(a-b)\omega\varpi+\ldots$$

et, en négligeant des multiples des périodes,

$$s\equiv\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left(\omega b'-\varpi a'+a\frac{\varpi^2}{2}-b\frac{\omega^2}{2}+a\omega\varpi-b\omega\varpi\right).$$

Dans le cas particulier où l'on a

$$\Theta(x+\omega)=\Theta(x),\qquad \Theta(x+\varpi)=\Theta(x)e^{-\frac{2\pi i}{\omega}\sqrt{-1}(x+c)}$$

$$a=0,\qquad a'=0,\qquad b=-\frac{2\pi i}{\omega}\sqrt{-1},\qquad b'=-\frac{2i\pi}{\omega}c\sqrt{-1},$$

il vient

$$(3)\qquad s\equiv i\left(\frac{\omega}{2}-c+\varpi\right)$$

XII. — Formation des fonctions auxiliaires et doublement périodiques admettant des zéros ou des infinis donnés.

THÉORÈME I. — *Il existe une fonction auxiliaire d'ordre i possédant dans chaque parallélogramme des périodes* ω, ϖ, *des zéros donnés.*

En effet, toute fonction auxiliaire d'ordre i est de la forme

$$A_0\theta_0 + A_1\theta_1 + \ldots + A_{i-1}\theta_{i-1} = \varphi(x);$$

si l'on pose

$$\varphi(a_1) = 0, \qquad \varphi(a_2) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi(a_{i-1}) = 0,$$

on aura $i - 1$ équations permettant de calculer A_1, A_2, ..., A_{i-1} en fonction de A_0, par exemple. Si l'on pose encore

$$\varphi(a_0) = 0,$$

cette formule permettra de calculer la constante désignée tout à l'heure par c, au moyen de la formule (3) du paragraphe précédent

$$s \quad \text{ou} \quad a_0 + a_1 + \ldots + a_{i-1} \equiv i\left(\frac{\omega}{2} - c + \varpi\right);$$

la fonction auxiliaire φ aura alors les i zéros a_0, ..., a_{i-1} et contiendra encore un facteur constant arbitraire.

THÉORÈME II. — *Il existe une fonction doublement périodique d'ordre i possédant i zéros donnés* a_0, a_1, ..., a_{i-1} *et i infinis donnés* b_0, b_1, ..., b_{i-1}, *dans chaque parallélogramme des périodes que l'on peut se donner arbitrairement, avec cette restriction toutefois que les zéros et les infinis doivent satisfaire à la relation*

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_{i-1} \equiv b_0 + b_1 + \ldots + b_{i-1}.$$

En effet, soit φ une fonction auxiliaire d'ordre i possédant à l'intérieur de chaque parallélogramme des périodes ω, ϖ les i zéros a_0, a_1, ..., a_{i-1}; cette fonction existe et elle est

déterminée à un facteur près. On peut former une autre fonction ψ aux mêmes périodes répondant à la même constante c et possédant, outre les zéros $b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}$, un autre zéro b_0, tel que

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_{i-1} \equiv b_0 + b_1 + \ldots + b_{i-1};$$

alors le rapport $\frac{\varphi}{\psi}$ a évidemment pour périodes ω, ϖ, pour zéros $a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}$ et pour infinis $b_0, b_1, \ldots, b_{i-1}$. [On pourrait craindre que les équations $\varphi(a_0) = 0$, $\varphi(a_1) = 0$, ... fussent indéterminées ; mais cela n'est pas possible, parce que l'on sait que deux fonctions doublement périodiques qui ont les mêmes zéros et les mêmes infinis sont égales à un facteur constant près.]

Théorème III. — *A l'aide d'une fonction auxiliaire du premier ordre, on peut former toutes les fonctions auxiliaires d'ordre i.*

Soit, en effet, $\theta(x)$ une fonction du premier ordre nulle pour $x = 0$: la fonction

$$\theta(x - a_0)\theta(x - a_1)\ldots\theta(x - a_{i-1}) = \varphi(x)$$

s'annulera pour $x = a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}$; de plus, elle sera d'ordre i. En effet, si l'on a

$$\theta(x + \omega) = \theta(x), \qquad \theta(x + \varpi) = \theta(x) e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}(x+c)},$$

on aura

$$\varphi(x + \omega) = \varphi(x),$$
$$\varphi(x + \varpi) = \varphi(x) e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}(ix+ic-a_0-\ldots-a_{i-1})}$$

ou, si l'on veut,

$$\varphi(x + \varpi) = \varphi(x) e^{-\frac{2i\pi\sqrt{-1}}{\omega}(x+C)},$$

en posant

$$C = c - \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_{i-1}}{i}.$$

Ce théorème nous sera bientôt utile.

Théorème IV. — *A l'aide d'une fonction doublement périodique du second ordre, on peut former toutes les fonctions d'ordre i aux mêmes périodes.*

En effet, d'abord au moyen d'une fonction du second ordre $f(x)$ possédant les zéros a_1, a_2 et les infinis α_1, α_2, tels que $a_1 + a_2 \equiv \alpha_1 + \alpha_2$, on peut former une fonction du second ordre possédant les zéros b_1, b_2 et les infinis β_1, β_2, tels que $b_1 + b_2 \equiv \beta_1 + \beta_2$. En effet, soit $a_1 + a_2 = s$: la fonction suivante, où A est constant,

$$A\,\frac{f(x+s)-f(b_1+s)}{f(x+s)-f(\beta_1+s)}$$

n'est plus infinie pour $x = \alpha_1$ ou $x = \alpha_2$, mais elle admet le zéro $x = b_1$ et l'infini $x = \beta_1$; mais on peut disposer de s, de telle sorte que $f(b_2 + s) = f(b_1 + s)$; il suffit pour cela que $b_1 + b_2 + 2s \equiv a_1 + a_2$; la fonction considérée aura donc les zéros b_1, b_2, l'infini β_1, et par suite un second infini β_2, tel que

$$b_1 + b_2 \equiv \beta_1 + \beta_2.$$

Maintenant, soit $F_1(x)$ une fonction du second ordre ayant pour zéros a_1, b_1, pour infinis α_1, α_2, tels que $a_1 + b_1 \equiv \alpha_1 + \alpha_2$; soit F_2 une fonction admettant les zéros a_2 et b_2 et les infinis α_2 et b_1, etc.; soit enfin $F_n(x)$ une fonction admettant les zéros a_{n-1} et b_n et les infinis b_{n-1} et α_n. Considérons le produit

$$f(x) = F_1(x)F_2(x)\ldots F_n(x);$$

il sera doublement périodique, si toutes les fonctions F_1, F_2, ..., ce que nous supposerons, ont mêmes périodes; en outre, il s'annulera évidemment quand on supposera

$$x = a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ b_n$$

et deviendra infini pour $x = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. La quantité b_n seule ne peut pas être choisie arbitrairement, mais on doit avoir

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + b_n \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

C. Q. F. D.

XIII. — Inversion d'une intégrale elliptique de première espèce.

Soit U un polynôme du quatrième degré en u : considérons l'intégrale

$$x = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Calculons ses périodes ω, ϖ: soient o et s les zéros de la fonction inverse, α et β les infinis, on a $\beta = s - \alpha$; car on sait qu'à chaque valeur de u correspondent, à des multiples des périodes près, deux valeurs x et $s - x$ de x. Considérons la fonction $f(x)$ doublement périodique, possédant les zéros o, s, les infinis α, β et les périodes ω, ϖ que nous avons appris à former au paragraphe précédent. Soit enfin

$$f\left(\int_0^u \frac{du}{\sqrt{U}}\right) = F(u);$$

$F(u)$ est monogène et continue, elle est aussi monodrome; en effet, à chaque valeur de u correspondent une infinité de valeurs de l'intégrale x, à savoir

$$m\omega + n\varpi + x \quad \text{et} \quad m\omega + n\varpi + s - x,$$

qui donnent à $f(x)$ la même valeur et par suite aussi à $F(u)$; donc $F(u)$ n'a qu'une seule valeur pour chaque valeur de u.

Pour $u = \infty$, $x = \alpha$ ou β et $f(x) = \infty$, donc $F(u) = \infty$; du reste, si u est fini, x est fini et, par suite, $F(u)$ est fini; $F(u)$ ne peut être nul que pour $f(x) = 0$, c'est-à-dire pour $x \equiv s$ ou o; alors $u = 0$. Ainsi $F(u)$ n'a qu'un zéro et un infini, à savoir o, ∞; ce zéro et cet infini sont simples, car

$$F'(u) = f'(x)\frac{dx}{du} = f'(x)\frac{1}{\sqrt{U}}.$$

Or $\sqrt{U}$ est fini pour $u = 0$ (ou du moins on peut éviter le cas où U serait nul pour $u = 0$); quant à $f'(x)$ il n'est pas nul, puisque $\theta_0(x)$ et par suite $f(x)$ n'ont que des zéros simples;

pour prouver que l'infini est simple, on considérera $\frac{1}{F(u)}$.
En résumé, $F(u)$ a les mêmes zéros et les mêmes infinis que la variable u; leur rapport A est donc constant et $F(u) = u$ en choisissant convenablement A.

Il résulte de là que la fonction inverse de $f(x)$ est l'intégrale elliptique, et que par suite, réciproquement, *l'inverse d'une intégrale elliptique est une fonction doublement périodique monodrome et monogène.*

XIV. — Relations entre une fonction doublement périodique et sa dérivée.

Nous allons voir que, réciproquement, toute fonction doublement périodique du second ordre a pour inverse une intégrale elliptique, mais nous allons généraliser un peu ce théorème.

Théorème I. — *Deux fonctions doublement périodiques u et v, dont les périodes sont commensurables deux à deux et sont dirigées dans le même sens, sont des fonctions algébriques l'une de l'autre.*

En effet, soient $m\omega$ et $n\varpi$ les périodes de u, et soient $m'\omega$ et $n'\varpi$ les périodes de v, m et n, m' et n' désignant des nombres entiers. Soit μ le plus petit multiple de m et m', soit ν le plus petit multiple de n et n' : $\mu\omega$ et $\nu\varpi$ seront des périodes des deux fonctions; le parallélogramme de côtés $\mu\omega$ et $\nu\varpi$ contient $\mu\nu$ petits parallélogrammes de côtés ω, ϖ; à chaque valeur de v correspondent β valeurs de x, si v est d'ordre β, et α valeurs de u si u est d'ordre α; donc à une valeur de v correspondent dans le parallélogramme $(\mu\omega, \nu\varpi)$, $\frac{\mu}{m'}\frac{\nu}{n'}\beta$ valeurs de x et de u. De même, à chaque valeur de u correspondent $\frac{\mu}{m}\frac{\nu}{n}\alpha$ valeurs de v; donc, comme les nombres des infinis de u et v l'un par rapport à l'autre sont limités, u et v sont liés par une relation du degré $\frac{\mu\nu\beta}{m'n'}$ en u et $\frac{\mu\nu\alpha}{mn}$ en v.

Supposons que $v = u'$ soit la dérivée de u : les fonctions u et v ont le même parallélogramme, mais u' est d'ordre plus élevé que u. Supposons u du second ordre, u' sera en général du quatrième ordre (il serait du troisième, si u avait un infini double), parce que les infinis de u' sont ceux de u avec un degré de multiplicité plus élevé d'une unité ; la relation qui lie u à u' est donc du quatrième degré en u et du second en u'. Soit

$$U_0 u'^2 + U_1 u' + U_2 = 0$$

cette relation, U_0, U_1, U_2 étant du quatrième degré au plus. Mais u' n'est jamais infini que pour $u = \infty$; donc U_0 est indépendant de u : on peut supposer $U_0 = 1$. En second lieu, la somme des valeurs de la variable x pour lesquelles u est donné est constante ; donc, si l'on appelle x_1 et x_2 ces valeurs, on a

$$\frac{dx_1}{du} + \frac{dx_2}{du} = 0$$

ou

$$\frac{1}{u'_1} + \frac{1}{u'_2} = 0,$$

donc

$$-\frac{U_1}{U_2} = 0 \quad \text{ou} \quad U_1 = 0 ;$$

donc enfin la relation qui lie une fonction doublement périodique du second ordre à sa dérivée est

$$u'^2 + U_2 = 0$$

ou bien

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{A u^4 + B u^3 + C u^2 + D u + E}.$$

Ce fait a été établi par M. Méray.

XV. — Les fonctions auxiliaires de Jacobi.

La fonction $\operatorname{sn} x$, inverse de l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta(x, k)} \quad \text{ou} \quad \Delta(x, k) = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)},$$

a pour périodes $4K$ et $2K'\sqrt{-1}$, K et K' étant donnés par les formules

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\Delta(x,k)}, \qquad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\Delta(x,k')} \qquad (k'^2 + k^2 = 1).$$

Ses zéros sont 0, $2K$, ses infinis $K'\sqrt{-1}$ et $2K + K'\sqrt{-1}$; elle sera donc égale au quotient de deux fonctions auxiliaires que l'on pourra former de bien des manières, ayant pour périodes $4K$ et $2K'\sqrt{-1}$, et s'annulant l'une pour $x = 0$ et $x = 2K$, l'autre pour $x = K'\sqrt{-1}$ et $x = 2K + K'\sqrt{-1}$.

Rappelons que, si une fonction auxiliaire du second ordre satisfait aux équations (p. 236)

$$(1) \qquad \begin{cases} \theta(x+\omega) = \theta(x), \\ \theta(x+\varpi) = \theta(x)\, e^{-\frac{4\pi\sqrt{-1}}{\omega}(x+c)}, \end{cases}$$

ses zéros α, β satisfont à la relation (p. 238)

$$\alpha + \beta \equiv 2\left(\frac{\omega}{2} + \varpi - c\right)$$

ou

$$(2) \qquad \alpha + \beta \equiv -2c,$$

et θ est une fonction linéaire arbitraire et homogène des deux fonctions

$$(3) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}[2\mu x + 2\mu c + \mu(\mu-1)\varpi]} \\ \displaystyle\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}[(2\mu+1)x + 2\mu c + \mu^2\varpi]}. \end{cases}$$

Alors, si l'on prend $\omega = 4K$, $\varpi = 2K'\sqrt{-1}$, $\alpha + \beta = 2K$, et $2c \equiv 2K$, ou $2c = 2K + 2K'\sqrt{-1}$, les formules (3) deviendront, à l'ordre près,

$$\sum e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(\mu x + \mu K + \mu^2 K'\sqrt{-1})},$$

$$\sum e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2K}[(2\mu+1)x + 2\mu K + 2K'\sqrt{-1}\,\mu(\mu+1)]}.$$

Nous représenterons la première expression avec Jacobi par $\Theta(x)$, la seconde par $H(x)$, après l'avoir multipliée par $e^{-\frac{\pi K'}{4K}}$; nous poserons en outre

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

et nous supposerons la partie réelle de $\frac{K'}{K}$ positive ([1]). Nous aurons alors, en groupant les termes deux à deux,

$$(4)\quad \Theta(x) = 1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} - \ldots \pm 2q^{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2K} \mp \ldots,$$

$$(5)\quad H(x) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi x}{2K} - 2q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{3\pi x}{2K} + \ldots \pm 2q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\sin\frac{2n+1}{2K}n x \mp \ldots.$$

$H(x)$ s'annulant pour $x = 0$ est une des fonctions demandées. Soit α un zéro de $\Theta(x)$; comme $\Theta(x)$ a évidemment pour période $2K$, $2K + \alpha$ est un zéro de $\Theta(x)$; donc, en vertu de (2),

$$2K + 2\alpha \equiv 2K \quad \text{ou} \quad 2\alpha \equiv 0.$$

Ainsi α est égal à une demi-période; or

$$\Theta(2K) = 1 - q + q^4 - \ldots$$

ne peut être nul, quel que soit q; donc $\Theta\left(K'\sqrt{-1}\right) = 0$ et la fonction $\Theta(x)$ s'annulant pour $x = K'\sqrt{-1}$ est l'autre fonction cherchée : cela a besoin d'être confirmé par la formule (12).

Indépendamment des fonctions Θ et H, dans cette théorie, il est utile de considérer les fonctions $\Theta(x+K)$ et $H(x+K)$ que Jacobi a désignées par $\Theta_1(x)$ et $H_1(x)$. On a évidemment

$$(6)\quad \Theta_1(x) = 1 + 2q\cos\frac{\pi x}{K} + \ldots + 2q^{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2K} + \ldots,$$

$$(7)\quad H_1(x) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\pi x}{2K} + 2q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{3\pi x}{2K} + \ldots + 2q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\cos\frac{2n+1}{K}\pi x + \ldots.$$

([1]) Sinon K' est une période, $-K'$ en est une aussi, $-\frac{K'}{K}$ a sa partie réelle positive, et l'on posera $q = e^{\pi\frac{K'}{K}}$.

Les fonctions Θ, H, Θ_1, H_1 jouissent, comme il est facile de le voir, des propriétés exprimées par les formules

$$(8)\quad \begin{cases} \Theta\,(x+4K)=\Theta\,(x), & H\,(x+4K)=H\,(x), \\ \Theta_1(x+4K)=\Theta_1(x), & H_1(x+4K)=H_1(x). \end{cases}$$

En posant $A = e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})}$,

$$(9)\quad \begin{cases} \Theta\,(x+2K'\sqrt{-1})=-A\Theta\,(x), & H\,(x+2K'\sqrt{-1})=-AH\,(x), \\ \Theta_1(x+2K'\sqrt{-1})=A\Theta_1(x), & H_1(x+2K'\sqrt{-1})=AH_1(x) \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \Theta\,(-x)=\Theta(x), & H\,(-x)=-H(x), \\ \Theta_1(-x)=\Theta(x), & H_1(-x)=H(x), \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} \Theta\,(x+K)=\Theta_1(x), & H\,(x+K)=H_1(x), \\ \Theta_1(x+K)=\Theta\,(x), & H_1(x+K)=-H(x). \end{cases}$$

A ces formules on peut joindre, en posant

$$B = e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4K}(2x+K'\sqrt{-1})},$$

$$(12)\quad \begin{cases} \Theta\,(x+K'\sqrt{-1})=\sqrt{-1}\,BH\,(x), \\ H\,(x+K'\sqrt{-1})=\sqrt{-1}\,B\Theta\,(x), \\ \Theta_1(x+K'\sqrt{-1})=\phantom{\sqrt{-1}}\,BH_1(x), \\ H_1(x+K'\sqrt{-1})=\phantom{\sqrt{-1}}\,B\Theta_1(x), \end{cases}$$

que l'on démontre ainsi

$$\Theta_1(x)=\sum q^{n^2}e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}nx};$$

donc

$$\Theta_1(x+K'\sqrt{-1})=\sum q^{n^2}e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(nx+nK'\sqrt{-1})}$$

ou

$$\Theta_1(x+K'\sqrt{-1})=\sum q^{n^2+n}e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}nx}$$
$$=q^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2K}x}\sum q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2K}(2n+1)x},$$

c'est-à-dire

$$\Theta_1(x + K'\sqrt{-1}) = q^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2K}x} H_1(x);$$

c'est l'une des formules (12) : les autres se vérifient d'une façon analogue.

XVI. — Nouvelle forme des fonctions auxiliaires.

On peut mettre les fonctions auxiliaires sous une infinité de formes différant, comme on l'a vu, par un facteur exponentiel de la forme e^{Ax^2+Bx+C}; l'un de ces facteurs se présente tout naturellement. On a, en effet,

$$\Theta(x) = \sum e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(\mu x + \mu K + \mu^2 K'\sqrt{-1})},$$

ce que l'on peut écrire

$$\Theta(x) = \sum \pm e^{\frac{\pi}{KK'}(K'\mu x\sqrt{-1} - \mu^2 K'^2)}$$
$$= \sum \pm e^{\frac{\pi}{4KK'}(x + 2\mu K'\sqrt{-1})^2} e^{-\frac{\pi x^2}{4KK'}}.$$

Si donc on pose

$$\theta'(x) = \sum \pm e^{\frac{\pi}{4KK'}(x+2\mu K'\sqrt{-1})^2},$$

on aura

$$(1) \qquad \theta'(x) = \Theta(x) e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}},$$

et il est facile de voir que l'on a

$$\theta'(x + 2K'\sqrt{-1}) = -\theta'(x),$$

$$(2) \qquad \theta'(x + 4K'\sqrt{-1}) = \theta'(x);$$

on a d'ailleurs, en changeant x en $x + 2K$ dans (1),

$$\theta'(x + 2K) = \Theta(x + 2K) e^{\frac{\pi}{4KK'}(x^2 + 4Kx + 4K^2)}$$

ou

$$(3) \qquad \theta'(x+2\mathrm{K}) = \Theta(x)\, e^{\frac{\pi x^2}{4\mathrm{KK}'}}\, e^{\frac{\pi}{\mathrm{K}'}(x+\mathrm{K})} = \theta'(x)\, e^{\frac{\pi}{\mathrm{K}'}(x+\mathrm{K})}.$$

La fonction θ' est donc du second ordre, aux périodes $2\mathrm{K}$ et $4\mathrm{K}'\sqrt{-1}$, ses zéros sont ceux de $\Theta(x)$, à savoir $\mathrm{K}'\sqrt{-1}$ et $3\mathrm{K}'\sqrt{-1}$; la fonction θ' est donc fonction homogène et linéaire des fonctions obtenues en faisant, dans les équations (3) du paragraphe précédent, $\omega = -4\mathrm{K}'\sqrt{-1}$, $\varpi = 2\mathrm{K}$, $2c \equiv 0$. Nous prendrons $2c = 2\mathrm{K}$ et nous aurons les deux fonctions

$$\sum e^{-\frac{\pi}{2\mathrm{K}'}(2\mu x + 2\mu^2 \mathrm{K})},$$

$$\sum e^{-\frac{\pi}{2\mathrm{K}'}[(2\mu+1)x + 2\mu^2\mathrm{K} + 2\mu\mathrm{K}]};$$

en posant alors $p = e^{-\pi\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}}$, on pourra écrire ces fonctions ainsi, en faisant abstraction d'un facteur constant,

$$(4) \qquad \begin{cases} \sum p^{\mu^2} \cosh \dfrac{\mu\pi x}{\mathrm{K}'}, \\ \sum p^{\left(\frac{2\mu+1}{2}\right)^2} \cosh \dfrac{2\mu+1}{2\mathrm{K}'}\pi x. \end{cases}$$

La dernière de ces fonctions s'annule pour $x = \mathrm{K}'\sqrt{-1}$: elle est donc égale à θ' à un facteur constant près. En posant de même

$$\theta'_1(x) = \Theta_1(x)\, e^{\frac{\pi x^2}{4\mathrm{KK}'}},$$

on voit que θ'_1 sera une fonction linéaire et homogène des deux fonctions (4); la première de ces fonctions admet pour période $2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$; si donc α est un de ses zéros, $\alpha + 2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$ en sera un autre; la somme des zéros est une période : donc $2\alpha + 2\mathrm{K}'\sqrt{-1} \equiv 0$, donc $2\alpha \equiv 2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$, donc α est égal à $\mathrm{K}'\sqrt{-1}$ plus une demi-période; donc

$$\alpha = \mathrm{K} + \mathrm{K}'\sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad \alpha = 3\mathrm{K}'\sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad -\mathrm{K}'\sqrt{-1}.$$

Mais $-K'\sqrt{-1}$ ne peut être racine quel que soit p, donc $\alpha = K + K'\sqrt{-1}$: c'est un zéro de $\Theta_1(x)$; ainsi la première des fonctions (4) est égale à $\theta'_1(x)$, à un facteur constant près.

On démontrerait exactement de la même façon que les fonctions

$$\eta'(x) = H(x)e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}, \qquad \eta'_1(x) = H_1(x)e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}$$

sont, à des facteurs constants près, égales à

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \pm p^{\left(\frac{2\mu+1}{2}\right)^2} \sinh \frac{2\mu+1}{2K'}\pi x, \\ \sum \pm p^{\mu^2} \cosh \frac{\mu\pi x}{K'}. \end{array} \right.$$

Nous poserons

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \theta(x) = 2p^{\frac{1}{4}} \cosh \frac{\pi x}{2K'} + 2p^{\frac{9}{4}} \cosh \frac{3\pi x}{2K'} + \ldots, \\ \theta_1(x) = 1 + 2p \cosh \frac{\pi x}{K'} + 2p^4 \cosh \frac{2\pi x}{K'} + \ldots, \\ \eta(x) = 2p^{\frac{1}{4}} \sinh \frac{\pi x}{2K'} + 2p^{\frac{9}{4}} \sinh \frac{3\pi x}{2K'} + \ldots, \\ \eta_1(x) = 1 - 2p \cosh \frac{\pi x}{K'} + 2p^4 \cosh \frac{2\pi x}{K'} - \ldots. \end{array} \right.$$

Nous aurons alors, en appelant C une constante,

$$\theta(x) = Ce^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}\Theta(x);$$

si, dans cette formule, on change x en $x + K\sqrt{-1}$, on a (p. 247)

$$\sqrt{-1}\,\eta(x) = Ce^{\pi\frac{(x+K'\sqrt{-1})^2}{4KK'}}\sqrt{-1}\,e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4K}(x+K'\sqrt{-1})}H(x)$$

ou, réductions faites,

$$\eta(x) = Ce^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}H(x).$$

En changeant x en $x+K$, puis, de nouveau, en $x+K'\sqrt{-1}$, on constatera que l'on a

$$\frac{\theta}{\Theta}=\frac{\theta_1}{\Theta_1}=\frac{\eta}{H}=\frac{\eta_1}{H_1}=Ce^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}.$$

Il reste à déterminer la constante C, ce que nous ferons plus loin.

XVII. — Formule de Cauchy.

Posons

$$(1)\quad F(z)=(1+qz)(1+qz^{-1})(1+q^3z)(1+q^3z^{-1})\dots(1+q^{2n-1}z)(1+q^{2n-1}z^{-1}).$$

Il est facile de voir que l'on a

$$F(q^2z)=\frac{1+q^{2n+1}z}{1+qz}\,\frac{1+q^{-1}z^{-1}}{1+q^{2n-1}z^{-1}}\,F(z)$$

ou bien

$$(2)\qquad F(q^2z)(qz+q^{2n})=F(z)(1+q^{2n+1}z).$$

Or on peut poser

$$(3)\quad F(z)=A_0+A_1(z+z^{-1})+A_2(z^2+z^{-2})+\dots+A_n(z^n+z^{-n}),$$

$A_0, A_1, \dots, A_n$ désignant des coefficients indépendants de z. Si l'on remplace dans (2) $F(z)$ et $F(q^2z)$ par leurs valeurs tirées de (3), on trouve

$$\begin{aligned}(qz+q^{2n})[A_0+A_1(q^2z+q^{-2}z^{-1})+\dots+A_n(q^{2n}z^n+q^{-2n}z^{-n})]\\ =(1+q^{2n+1}z)[A_0+A_1(z+z^{-1})+\dots+A_n(z^n+z^{-n})];\end{aligned}$$

en égalant alors les coefficients des mêmes puissances de z dans les deux membres, on a

$$\begin{aligned}A_0q+A_1q^{2n+2}&=A_1+A_0q^{2n+1},\\ A_1q^3+A_2q^{2n+4}&=A_2+A_1q^{2n+1},\\ \dots\dots\dots&\dots\dots\dots\end{aligned}$$

ou bien

$$(4)\quad \begin{cases} A_1 = A_0 \dfrac{1-q^{2n}}{1-q^{2n+2}}\, q, \\[1ex] A_2 = A_0 \dfrac{1-q^{2n}}{1-q^{2n+2}} \dfrac{1-q^{2n-2}}{1-q^{2n+4}}\, q^4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ A_n = A_0 \dfrac{1-q^{2n}}{1-q^{2n+2}} \dfrac{1-q^{2n-2}}{1-q^{2n+4}} \cdots \dfrac{1-q^2}{1-q^{4n}}\, q^{n^2}; \end{cases}$$

on déduit de là

$$(5)\quad \begin{cases} F(z) = A_0 \Big[1 + \dfrac{1-q^{2n}}{1-q^{2n+2}}\, q \left(z + \dfrac{1}{z}\right) \\ \qquad + \dfrac{1-q^{2n}}{1-q^{2n+2}} \dfrac{1-q^{2n-2}}{1-q^{2n+4}}\, q^4 \left(z^2 + \dfrac{1}{z^2}\right) \cdots \Big]. \end{cases}$$

Pour déterminer A_0, on observe que A_n est évidemment égal à $q \cdot q^3 \cdot q^5 \dots q^{2n+1} = q^{n^2}$; la dernière formule (4) donnera alors

$$1 = \frac{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2n})}{(1-q^{2n+2})\dots(1-q^{4n})} A_0$$

ou

$$(6)\qquad A_0 = \frac{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})\dots(1-q^{4n})}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2n})}.$$

Des formules (1), (5), (6), on tire

$$(7)\quad \begin{cases} (1+qz)(1+qz^{-1})\dots(1+q^{2n-1}z)(1+q^{2n-1}z^{-1}) \\ \quad = \dfrac{(1-q^{2n+2})\dots(1-q^{4n})}{(1-q^2)\dots(1-q^{2n})} \left[1 + \dfrac{1-q^{2n}}{1-q^{2n+2}}\, q \left(z + \dfrac{1}{z}\right) + \dots \right]. \end{cases}$$

Nous allons maintenant supposer $n = \infty$; le premier membre de cette formule devient alors le produit infini

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1+q^{2n+1}z)(1+q^{2n+1}z^{-1}).$$

La fraction qui entre en multiplicateur dans le second membre peut s'écrire

$$\frac{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{4n})}{(1-q^2)^2(1-q^4)^2\dots(1-q^{2n})^2}$$

et, par suite, a pour limite $\dfrac{1}{\prod_1^\infty (1-q^{2n})}$. La formule (7) devient alors

$$\prod_1^\infty (1+q^{2n+1}z)(1+q^{2n+1}z^{-1})\prod_1^\infty (1-q^{2n})$$
$$= \lim\left[1+\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n+2}}\,q\left(z+\frac{1}{z}\right)+\ldots\right].$$

Désignons par S_{m+1} la somme des $m+1$ premiers termes de la quantité entre crochets, R_{m+1} la somme des termes suivants, on pourra toujours prendre n assez grand pour que l'on ait

$$S_{m+1} = 1+q\left(z+\frac{1}{z}\right)+\ldots+q^{m^2}\left(z^m+\frac{1}{z^m}\right)+\varepsilon,$$

ε désignant une quantité de module moindre qu'une quantité donnée α. Quant à R_{m+1}, si l'on appelle μ le module de q et ν celui de z, il sera de module moindre que

$$\mu^{m^2}\left(\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}\right)^m\left(\nu^m+\frac{1}{\nu^m}\right)+\mu^{(m+1)^2}\left(\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}\right)^{m+1}\left(\nu^{m+1}+\frac{1}{\nu^{m+1}}\right)\ldots;$$

or on peut toujours prendre m assez grand pour que cette quantité soit moindre que α, car la série précédente est convergente, même lorsqu'on la divise par μ^m; m étant ainsi déterminé, n étant indépendant de m, on peut toujours faire en sorte que mod $\varepsilon < \alpha$, et alors

$$\prod_1^\infty (1+q^{2n+1}z)(1+q^{2n+1}z^{-1})\prod_1^\infty (1-q^{2n})$$

différera de S_{m+1} d'une quantité dont le module sera moindre que 2α; on peut donc dire que cette quantité est égale à la limite de S_{m+1} et, par suite, on a

$$\prod_1^\infty (1+q^{2n+1}z)(1+q^{2n+1}z^{-1})\prod_1^\infty (1-q^{2n})$$
$$= 1+q\left(z+\frac{1}{z}\right)+q^4\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\ldots+q^{m^2}\left(z^m+\frac{1}{z^m}\right)+\ldots.$$

Telle est la formule de Cauchy que nous voulions obtenir.

XVIII. — Développement des fonctions auxiliaires en produits.

Si, dans la formule de Cauchy, démontrée au paragraphe précédent,

$$\prod_1^\infty (1 + q^{2n+1} z)(1 + q^{2n+1} z^{-1}) \prod_1^\infty (1 - q^{2n})$$
$$= 1 + \sum q^{n^2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right),$$

on fait $z = e^{\frac{\pi x \sqrt{-1}}{K}}$, $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$, il vient

$$\prod_1^\infty (1 - q^{2n}) \prod_1^\infty \left(1 + 2q^{2n+1}\cos\frac{\pi x}{K} + q^{4n+2}\right)$$
$$= 1 + 2\sum q^{n^2}\cos n\frac{\pi x}{K} = \Theta_1(x).$$

On trouve ainsi le développement de $\Theta_1(x)$ en produit et, en changeant x en $x + K$, en $x + K'\sqrt{-1}$ et en $x + K + K'\sqrt{-1}$, on obtient ceux de Θ, H_1 et H. On a alors le groupe suivant de formules :

$$\Theta(x) = \prod (1 - q^{2n})\left(1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + q^2\right)\left(1 - 2q^3\cos\frac{\pi x}{K} + q^6\right)\ldots,$$

$$\Theta_1(x) = \prod (1 - q^{2n})\left(1 + 2q\cos\frac{\pi x}{K} + q^2\right)\left(1 + 2q^3\cos\frac{\pi x}{K} + q^6\right)\ldots,$$

$$H(x) = 2q^{\frac14}\prod(1 - q^{2n})\sin\frac{\pi x}{2K}$$
$$\times\left(1 - 2q^2\cos\frac{\pi x}{K} + q^4\right)\left(1 - 2q^4\cos\frac{\pi x}{K} + q^8\right)\ldots,$$

$$H_1(x) = 2q^{\frac14}\prod(1 - q^{2n})\cos\frac{\pi x}{2K}$$
$$\times\left(1 + 2q^2\cos\frac{\pi x}{K} + q^4\right)\left(1 + 2q^4\cos\frac{\pi x}{K} + q^8\right)\ldots.$$

Ces formules qui sont très utiles, fournissent des identités curieuses quand on y suppose $x = 0$, $x = K$ ou $x = \frac{K}{2}$; nous nous dispenserons de les écrire.

Les fonctions θ, η, θ_1, η_1 donnent lieu à des formules analogues.

Quand on pose dans la formule de Cauchy $q = p = e^{-\frac{\pi K}{K'}}$ et $z = e^{\frac{\pi x}{K}}$, on trouve

$$\prod_1^\infty \left(1 + 2p^{2n+1} \cosh \frac{\pi x}{K'} + p^{4n+2}\right) \prod_1^\infty (1 - p^{2n})$$
$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} p^{2n} \cosh \frac{n\pi x}{K'},$$

ce qui donne le développement de $\theta_1(x)$ en produit. En traitant cette formule comme celle qui est relative à la fonction Θ_1, on trouve les développements suivants

$$P = (1 - p^2)(1 - p^4)(1 - p^6)\ldots,$$

$$\theta\ (x) = 2p^{\frac{1}{4}} P \cosh \frac{\pi x}{2K'}$$
$$\times \left(1 + 2p^2 \cosh \frac{\pi x}{K'} + p^4\right)\left(1 + 2p^4 \cosh \frac{\pi x}{K'} + p^8\right)\ldots,$$
$$\theta_1(x) = P\left(1 + 2p \cosh \frac{\pi x}{K'} + p^2\right)\left(1 + 2p^3 \cosh \frac{\pi x}{K'} + p^6\right)\ldots.$$
$$\eta\ (x) = 2p^{\frac{1}{4}} P \sinh \frac{\pi x}{2K'}$$
$$\times \left(1 - 2p^2 \cosh \frac{\pi x}{K'} + p^4\right)\left(1 - 2p^4 \cosh \frac{\pi x}{K'} + p^8\right)\ldots,$$
$$\eta_1(x) = P\left(1 - 2p \cosh \frac{\pi x}{K'} + p^2\right)\left(1 - 2p^3 \cosh \frac{\pi x}{K'} + p^6\right)\ldots;$$

d'où l'on peut déduire une foule d'identités algébriques que nous nous dispenserons d'écrire.

XIX. — Relations entre les fonctions de Jacobi.

Les quatre fonctions H, Θ, H_1, Θ_1 sont du premier ordre, leurs carrés sont du second ordre : d'après (8), (10) et (9)

du § XV, les fonctions $H^2(x)$, $\Theta^2(x)$, $H_1^2(x)$, $\Theta_1^2(x)$ satisfont aux équations

$$\theta(x+2K)=\theta(x),$$

$$\theta(x+2K'\sqrt{-1})=\theta(x)e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{2K}2(x+K'\sqrt{-1})};$$

par suite, l'une quelconque d'entre elles (p. 236) est une fonction linéaire et homogène de deux d'entre elles. On peut donc poser

$$(1)\qquad \begin{cases} \Theta^2(x)=AH^2(x)+BH_1^2(x),\\ \Theta^2(x)=CH^2(x)+D\Theta_1^2(x),\end{cases}$$

A, B, C, D désignant des quantités indépendantes de x que l'on déterminera en faisant $x=0$, $x=K$ et $x=K+K'\sqrt{-1}$; on aura alors pour $x=0$, en observant que $H(0)=0$,

$$B=\frac{\Theta^2(0)}{H_1^2(0)},\qquad D=\frac{\Theta^2(0)}{\Theta_1^2(0)};$$

en faisant $x=K$, ce qui annule $H_1(x)$, on trouve

$$A=\frac{\Theta^2(K)}{H^2(K)}=\frac{\Theta_1^2(0)}{H_1^2(0)};$$

en faisant $x=K+K'\sqrt{-1}$, ce qui annule $\Theta_1(x)$, on a de même

$$C=\frac{\Theta^2(K+K'\sqrt{-1})}{H^2(K+K'\sqrt{-1})}=\frac{\Theta_1^2(K'\sqrt{-1})}{H_1^2(K'\sqrt{-1})}=\frac{H_1^2(0)}{\Theta_1^2(0)}$$

Les formules (1) deviennent alors

$$\Theta^2(x)=\frac{\Theta_1^2(0)}{H_1^2(0)}H^2(x)+\frac{\Theta^2(0)}{H_1^2(0)}H_1^2(x),$$

$$\Theta^2(x)=\frac{H_1^2(0)}{\Theta_1^2(0)}H^2(x)+\frac{\Theta^2(0)}{\Theta_1^2(0)}\Theta_1^2(x);$$

nous les écrirons ainsi

$$(2)\qquad \begin{cases} 1=\dfrac{\Theta_1^2(0)}{H_1^2(0)}\dfrac{H^2(x)}{\Theta^2(x)}+\dfrac{\Theta^2(0)}{H_1^2(0)}\dfrac{H_1^2(x)}{\Theta^2(x)},\\[2ex] 1=\dfrac{H_1^2(0)}{\Theta_1^2(0)}\dfrac{H^2(x)}{\Theta^2(x)}+\dfrac{\Theta^2(0)}{\Theta_1^2(0)}\dfrac{\Theta_1^2(x)}{\Theta^2(x)},\end{cases}$$

et nous poserons

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{H(x)}{\Theta(x)}\,\dfrac{\Theta_1(o)}{H_1(o)} = \lambda(x), \\[2mm] \dfrac{H_1(x)}{\Theta(x)}\,\dfrac{\Theta(o)}{H_1(o)} = \mu(x), \\[2mm] \dfrac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}\,\dfrac{\Theta(o)}{\Theta_1(o)} = \nu(x), \\[2mm] \dfrac{H_1^2(o)}{\Theta_1^2(o)} = k. \end{cases}$$

Les formules (2) donneront alors

$$(4)\quad \begin{cases} \lambda^2(x) + \mu^2(x) = 1, \\ k^2\lambda^2(x) + \nu^2(x) = 1; \end{cases}$$

les fonctions λ, μ, ν sont doublement périodiques. Il doit exister une relation algébrique entre ces fonctions et leurs dérivées; cherchons la relation entre λ et λ', on a

$$(5)\quad \lambda'(x) = \frac{\Theta_1(o)}{H_1(o)}\,\frac{H'(x)\,\Theta(x) - \Theta'(x)\,H(x)}{\Theta^2(x)}.$$

Or les fonctions $H'(x)\Theta(x) - \Theta'(x)H(x)$, $H(x)\Theta(x)$ et $H_1(x)\Theta_1(x)$ satisfont aux relations

$$\theta(x + 2K) = \theta(x)\,e^{\pi\sqrt{-1}},$$

$$\theta\left(x + 2K'\sqrt{-1}\right) = \theta(x)\,e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{K}\,2(x+K'\sqrt{-1})};$$

donc l'une d'elles est fonction linéaire et homogène des deux autres (p. 236); on peut donc poser

$$H'(x)\,\Theta(x) - \Theta'(x)\,H(x) = A\,H(x)\,\Theta(x) + B\,H_1(x)\,\Theta_1(x).$$

Si l'on change x en $-x$, il vient

$$H'(x)\,\Theta(x) - \Theta'(x)\,H(x) = -A\,H(x)\,\Theta(x) + B\,H_1(x)\,\Theta_1(x),$$

donc $A = o$, et l'on a

$$H'(x)\,\Theta(x) - \Theta'(x)\,H(x) = B\,H_1(x)\,\Theta_1(x);$$

si l'on fait $x = o$, on a

$$H'(o)\,\Theta(o) = B\,H_1(o)\,\Theta_1(o),$$

d'où

$$B = \frac{H'(o)\,\Theta(o)}{H_1(o)\,\Theta_1(o)};$$

on a donc

$$H'(x)\,\Theta(x) - \Theta'(x)\,H(x) = \frac{H'(o)\,\Theta(o)}{H_1(o)\,\Theta_1(o)}\,H_1(x)\,\Theta_1(x).$$

Si nous portons cette valeur dans (5), nous aurons

$$\frac{d\lambda(x)}{dx} = \frac{H'(o)\,\Theta(o)}{H_1^2(o)}\,H_1(x)\,\Theta_1(x)$$

ou, en vertu de (3),

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{H'(o)}{H_1(o)}\,\frac{\Theta_1(o)}{\Theta(o)}\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}.$$

Nous ferons

(6) $$\frac{H'(o)}{H_1(o)}\,\frac{\Theta_1(o)}{\Theta(o)} = g,$$

alors nous trouverons

$$g\,dx = \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}};$$

on a donc, ou on peut même poser comme définition de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$,

(7) $$\lambda(x) = \operatorname{sn} gx, \qquad \mu(x) = \operatorname{cn} gx, \qquad \nu(x) = \operatorname{dn} gx.$$

Si, dans la seconde formule (2), on fait $x = K$, on a

$$1 = \frac{H_1^4(o)}{\Theta_1^4(o)} + \frac{\Theta^4(o)}{\Theta_1^4(o)}$$

ou, en vertu de la quatrième formule (3),

$$\frac{\Theta^4(o)}{\Theta_1^4(o)} = 1 - k^2.$$

Nous poserons

(8) $$k' = \frac{\Theta^2(o)}{\Theta_1^2(o)}, \qquad \text{et} \qquad k^2 + k'^2 = 1$$

XX. — Expression de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ au moyen des fonctions auxiliaires.

En résumé, si l'on se donne K et K′, on pourra former les fonctions $\Theta(x)$, $\mathrm{H}(x)$, $\Theta_1(x)$, $\mathrm{H}_1(x)$, puis les modules [formules (3) et (8) du paragraphe précédent]

$$(1) \qquad k = \frac{\mathrm{H}_1^2(0)}{\Theta_1^2(0)}, \qquad k' = \frac{\Theta^2(0)}{\Theta_1^2(0)}$$

et le multiplicateur [formule (6) du paragraphe précédent]

$$(2) \qquad g = \frac{\mathrm{H}'(0)}{\mathrm{H}_1(0)}\,\frac{\Theta_1(0)}{\Theta(0)}.$$

Alors on aura [formule (2) du paragraphe précédent]

$$\lambda(x) = \operatorname{sn} gx = \frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}\,\frac{\Theta_1(0)}{\mathrm{H}_1(0)},$$

$$\mu(x) = \operatorname{cn} gx = \frac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)}\,\frac{\Theta(0)}{\mathrm{H}_1(0)},$$

$$\nu(x) = \operatorname{dn} gx = \frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}\,\frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)}$$

ou encore

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{sn} gx &= \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)},\\ \operatorname{cn} gx &= \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)},\\ \operatorname{dn} gx &= \sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}.\end{aligned}\right.$$

Si nous prenons le multiplicateur g égal à l'unité, nous établissons par le fait une relation entre K et K′, et les formules (3) deviennent

$$(4) \qquad \operatorname{sn} x = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{H}}{\Theta}, \qquad \operatorname{cn} x = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\mathrm{H}_1}{\Theta}, \qquad \operatorname{dn} x = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1}{\Theta}.$$

La relation qui lie alors K à K′ sera la relation (2), où l'on fera $g = 1$, à savoir

$$\frac{\mathrm{H}'(0)}{\mathrm{H}_1(0)}\,\frac{\Theta_1(0)}{\Theta(0)} = 1;$$

en remplaçant Θ, H, H_1, Θ_1 par leurs valeurs, cette relation devient

$$(5)\quad \frac{\pi}{2K}\,\frac{\left(q^{\frac{1}{4}}-3q^{\frac{9}{4}}+5q^{\frac{25}{4}}-\ldots\right)(1+2q+2q^4+2q^9\ldots)}{\left(q^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{9}{4}}+q^{\frac{25}{4}}\ldots\right)(1-2q+2q^4-2q^9\ldots)}=1.$$

Les formules (1) donnent lieu aux relations

$$(6)\qquad \sqrt{k}=\frac{2q^{\frac{1}{4}}+2q^{\frac{9}{4}}+2q^{\frac{25}{4}}+\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots},$$

$$(7)\qquad \sqrt{k'}=\frac{1-2q+2q^4-2q^9+\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots};$$

la formule (5) peut alors s'écrire

$$(8)\qquad \frac{K\sqrt{k}}{\pi}=\frac{q^{\frac{1}{4}}-3q^{\frac{9}{4}}+5q^{\frac{25}{4}}-\ldots}{1-2q+2q^4-2q^9+\ldots}$$

et

$$(9)\qquad \frac{2K\sqrt{k'}}{\pi}=\frac{q^{\frac{1}{4}}-3q^{\frac{9}{4}}+5q^{\frac{25}{4}}-\ldots}{q^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{9}{4}}+q^{\frac{25}{4}}+\ldots}.$$

XXI. — Usage des fonctions θ, η, θ_1, η_1. — Calcul de la constante C.

Puisque l'on a

$$(1)\qquad \frac{\theta}{\Theta}=\frac{\eta}{H}=\frac{\theta_1}{\Theta_1}=\frac{\eta_1}{H_1}=Ce^{\frac{\pi x^2}{4KK'}},$$

on aura aussi

$$\operatorname{sn}x=\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\eta(x)}{\theta(x)},$$

$$\operatorname{cn}x=\sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\eta_1(x)}{\theta(x)},$$

$$\operatorname{dn}x=\sqrt{k'}\,\frac{\theta_1(x)}{\theta(x)},$$

$$k=\frac{\eta_1^2(0)}{\theta_1^2(0)},\qquad k'=\frac{\theta^2(0)}{\theta_1^2(0)},\qquad 1=\frac{\eta'(0)}{\eta_1(0)}\,\frac{\theta_1(0)}{\theta(0)},\qquad \ldots.$$

Nous pouvons maintenant déterminer la constante C qui entre dans la formule (1); en effet, on a

$$1 = \frac{H'(0)\Theta_1(0)}{H_1(0)\Theta(0)}, \qquad 1 = \frac{\eta'(0)\theta_1(0)}{\eta_1(0)\theta(0)}.$$

Remplaçons dans ces formules $H'(0)$, $\Theta_1(0)$, ..., $\theta(0)$ par leurs développements en produits, en observant que

$$H'(0) = \lim \frac{H(x)}{x} \quad \text{pour } x = 0,$$

$$\eta'(0) = \lim \frac{\eta(x)}{x} \quad \text{pour } x = 0;$$

nous aurons

$$1 = \frac{\frac{\pi}{2K}(1-q^2)^2(1-q^4)^2\ldots(1+q)^2(1+q^3)^2\ldots}{(1+q^2)^2(1+q^4)^2\ldots(1-q)^2(1-q^3)^2\ldots},$$

$$1 = \frac{\frac{\pi}{2K'}(1-p^2)^2(1-p^4)^2\ldots(1+p)^2(1+p^3)^2\ldots}{(1-p)^2(1-p^3)^2\ldots(1+p^2)^2(1+p^4)^2\ldots};$$

on tire de ces deux formules (p. 254)

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2K}{\pi}} &= \frac{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1+q)(1+q^3)\ldots}{(1+q^2)(1+q^4)\ldots(1-q)(1-q^3)\ldots}\\ &= (1-q^2)(1-q^4)\ldots(1+q)^2(1+q^3)^2\ldots\\ &= \Theta_1(0),\\ \sqrt{\frac{2K'}{\pi}} &= (1-p^2)(1-p^4)\ldots(1+p)^2(1+p^3)^2\ldots\\ &= \theta_1(0);\end{aligned}$$

divisant ces formules membre à membre, en ayant égard à (1), on a

$$\sqrt{\frac{K}{K'}} = \frac{\Theta_1(0)}{\theta_1(0)} = \frac{1}{C};$$

ainsi la constante C est égale au rapport $\sqrt{\frac{K}{K'}}$ des racines carrées des intégrales complètes.

Les formules (1) peuvent alors s'écrire

$$\frac{\Theta}{\theta} = \frac{\Theta_1}{\theta_1} = \frac{H}{\eta} = \frac{H_1}{\eta_1} = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K'}}\, e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}.$$

XXII. — Périodes elliptiques.

Cherchons à former un système de fonctions elliptiques. En se donnant le module k, on pourra calculer q ou, ce qui revient au même, le rapport $\frac{K'}{K}$ au moyen de la formule (p. 260)

$$(1) \qquad \sqrt{k} = \frac{2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + \dots}.$$

La formule (p. 260)

$$(2) \qquad \frac{K\sqrt{k}}{\pi} = \frac{q^{\frac{1}{4}} + 3q^{\frac{9}{4}} + 5q^{\frac{25}{4}} - \dots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots}$$

permettra ensuite de calculer K et, par suite, K′. Quand on se donne k, il y a donc une infinité de valeurs possibles pour K et K′, le rapport $\frac{K'}{K}$ a une infinité de valeurs; mais, quand ce rapport est déterminé, K et K′ sont déterminés. Il résulte de là que, comme $\operatorname{sn} x$ ne dépend que de k, pour former une même fonction $\operatorname{sn} x$, on pourra employer une infinité de systèmes de fonctions Θ et H.

On appelle *périodes elliptiques* les périodes $4K$ et $2K'\sqrt{-1}$ qui sont telles que K et K′ soient des solutions des équations (1) et (2); ce sont, si l'on veut, toutes les périodes que l'on peut employer pour construire un système de fonctions H, Θ, telles que l'on ait

$$(3) \quad \frac{H(x)}{\Theta(x)} = \sqrt{k}\operatorname{sn} x, \qquad \frac{H_1(x)}{\Theta(x)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\operatorname{cn} x, \qquad \frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)} = \frac{1}{\sqrt{k'}}\operatorname{dn} x.$$

Appelons K_1 et K'_1 un système quelconque de solutions des systèmes (1), (2), le parallélogramme des périodes $4K_1$, $2K'_1\sqrt{-1}$, contenant seulement deux zéros de $\operatorname{sn} x$, devra être

un parallélogramme élémentaire, de sorte que, si K et K' désignent les intégrales

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_1^2x^2)}},$$

on devra avoir, m, m', n, n' désignant des entiers,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} 4K_1 &= 4mK + 2m'K'\sqrt{-1}, \\ 2K_1\sqrt{-1} &= 4nK + 2n'K'\sqrt{-1}, \\ mn' - nm' &= \pm 1, \end{aligned}\right.$$

et, pour que les formules (3) aient lieu, il faut que $\operatorname{cn} x$ s'annule pour $x = K_1$, et $\operatorname{dn} x$ pour $x = K_1 + K'_1\sqrt{-1}$; donc, en appelant α, β, α', β' des entiers,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} K_1 &= (2\alpha+1)K + 2\beta K'\sqrt{-1}, \\ K_1 + K'_1\sqrt{-1} &= (2\alpha'+1)K + (2\beta'+1)K'\sqrt{-1}. \end{aligned}\right.$$

Il faudra aussi que $\frac{K'}{K}$ ait sa partie réelle positive. La comparaison des formules (4) et (5) donne

$$4nK + 2n'K'\sqrt{-1} = 4.2\beta''K + (2\gamma''+1)2K'\sqrt{-1},$$
$$4mK + 2m'K'\sqrt{-1} = 4(2\alpha+1)K + 4.2\beta K'\sqrt{-1},$$

d'où l'on tire, en appelant a, b, c, d des entiers,

$$4K_1 = (2a+1).4K + 2b.2K'\sqrt{-1},$$
$$2K'_1 = 2c4K + (d+1)2K'\sqrt{-1}.$$

Enfin la condition que $\frac{K'}{K'_1}$ doit avoir sa partie réelle positive donne

$$(2a+1)(2d+1) - 4bc = 1,$$

et $a + d$ doit être pair.

XXIII. — Développement des fonctions elliptiques en séries trigonométriques.

Reprenons les formules de la page 254, que l'on peut écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\Theta\,(x) &= Q\left(1-2q\cos\frac{\pi x}{K}+q^2\right)\left(1-2q^3\cos\frac{\pi x}{K}+q^6\right)\ldots,\\
\Theta_1(x) &= Q\left(1+2q\cos\frac{\pi x}{K}+q^2\right)\left(1+2q^3\cos\frac{\pi x}{K}+q^6\right)\ldots,\\
H\,(x) &= Qq^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi x}{2K}\left(1-q^2\cos\frac{\pi x}{K}+q^4\right)\left(1-q^4\cos\frac{\pi x}{K}+q^8\right)\ldots,\\
H_1(x) &= Qq^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\pi x}{2K}\left(1+q^2\cos\frac{\pi x}{K}+q^4\right)\left(1+q^4\cos\frac{\pi x}{K}+q^8\right)\ldots,
\end{aligned}\right.$$

$$Q=(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots;$$

prenons les logarithmes des deux membres des formules précédentes, et observons que l'on a, en supposant le module de r inférieur à l'unité (T. III, p. 290),

$$-\frac{1}{2}\log(1-2r\cos\varphi+r^2)=r\cos\varphi+\frac{r^2}{2}\cos 2\varphi+\frac{r^3}{3}\cos 3\varphi\ldots;$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
&-\log\Theta(x)\\
&\quad=-\log Q+2\left[\cos\frac{\pi x}{K}\sum_0^\infty q^{2n+1}+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi x}{K}\sum_0^\infty q^{2(2n+1)}+\ldots\right]
\end{aligned}$$

. . . .

ou bien

$$-\log\Theta(x)=-\log Q+\frac{2q}{1-q^2}\cos\pi\frac{x}{K}+\frac{1}{2}\,\frac{2q^2}{1-q^4}\cos 2\pi\frac{x}{K}+\ldots,$$

. . . .;

en différentiant alors ces formules, on trouve les suivantes :

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} &= 2\,\frac{\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi x}{K}+\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi x}{K}+\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi x}{K}+\ldots\right),\\
\frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} &= -2\,\frac{\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi x}{K}-\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi x}{K}+\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi x}{K}-\ldots\right),\\
\frac{H'(x)}{H(x)} &= \frac{\pi}{2K}\cot\frac{\pi x}{2K}\\
&\quad+2\,\frac{\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1-q^2}\sin\frac{\pi x}{K}+\frac{q^4}{1-q^4}\sin\frac{2\pi x}{K}+\frac{q^6}{1-q^6}\sin\frac{3\pi x}{K}+\ldots\right),\\
\frac{H'_1(x)}{H_1(x)} &= -\frac{\pi}{2K}\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2K}\\
&\quad-2\,\frac{\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1-q^2}\sin\frac{\pi x}{K}-\frac{q^4}{1-q^4}\sin\frac{2\pi x}{K}+\frac{q^6}{1-q^6}\sin\frac{3\pi x}{K}-\ldots\right).
\end{aligned}\right.$$

On tire de ces formules, par soustraction,

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sn}'x}{\operatorname{sn}x} &= \frac{\pi}{2K}\cot\frac{\pi x}{2K}-\frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q}\sin\frac{\pi x}{K}+\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{2\pi x}{K}+\ldots\right),\\
\frac{\operatorname{cn}'x}{\operatorname{cn}x} &= -\frac{\pi}{2K}\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2K}\\
&\quad-\frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q}\sin\frac{\pi x}{K}+\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{2\pi x}{K}+\frac{q^3}{1-q^3}\sin\frac{3\pi x}{K}+\ldots\right),\\
\frac{\operatorname{dn}'x}{\operatorname{dn}x} &= -4\,\frac{\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi x}{K}+\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi x}{K}+\ldots\right),\\
\frac{\operatorname{tn}'x}{\operatorname{tn}x} &= \frac{\pi}{2K}\left(\cot\frac{\pi x}{2K}+\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2K}\right)\\
&\quad+\frac{2\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{2\pi x}{K}+\frac{q^4}{1+q^4}\sin\frac{4\pi x}{K}+\ldots\right).
\end{aligned}\right.$$

XXIV. — Relations nouvelles entre les modules et les périodes.

Reprenons les formules (p. 259)

$$(1)\qquad \sqrt{k}=\frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)},\qquad \sqrt{k'}=\frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)},$$

$$(2)\qquad \frac{H'(0)}{H_1(0)}\,\frac{\Theta_1(0)}{\Theta(0)}=1.$$

Si, dans cette dernière formule, on remplace $\Theta(0)$, $\Theta_1(0)$, $H_1(0)$ par leurs valeurs tirées des formules (1) du paragraphe précédent, si l'on remplace $H'(0)$ par $\left|\frac{H(x)}{x}\right._{x=0}$ tiré des mêmes formules, on trouve

$$1 = \frac{q^{\frac{1}{4}}\frac{\pi}{2K}(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\ldots\times(1+q)^2(1+q^3)^2(1+q^5)^2\ldots}{q^{\frac{1}{4}}(1+q^2)^2(1+q^4)^2(1+q^6)^2\ldots\times(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots};$$

En supprimant au numérateur et au dénominateur le facteur

$$q^{\frac{1}{4}}(1+q^2)^2(1+q^4)^2\ldots\times(1-q)^2(1-q^3)^2\ldots,$$

il reste

$$1 = \frac{\pi}{2K}(1+q)^4(1+q^3)^4(1+q^5)^4\ldots\times(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\ldots,$$

formule qui peut s'écrire, en vertu des formules (1) du paragraphe précédent,

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \Theta_1(0) \tag{3}$$

ou encore

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots. \tag{4}$$

Cette formule remarquable conduit à une proposition curieuse d'Arithmétique. Dans la formule (3) du paragraphe précédent, qui donne $\frac{\operatorname{dn}' x}{\operatorname{dn} x}$, faisons $x = 0$; après avoir divisé par x, nous aurons

$$k^2 = 4\frac{\pi^2}{K^2}\left(\frac{q}{1-q^2} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \frac{5q^5}{1-q^{10}} + \ldots\right). \tag{5}$$

Si l'on traite de même celle qui donne $\frac{\mathrm{cn}'x}{\mathrm{cn}\,x}$, on a

$$(6)\quad 1 = \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\left(\frac{q}{1-q} + \frac{2q^2}{1-q^2} + \frac{3q^3}{1-q^3} + \ldots\right);$$

en combinant cette dernière avec (4), on trouve

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots)^4\\ &\quad = 1 + 4\left(\frac{q}{1-q} + \frac{2q^2}{1-q^2} + \frac{3q^3}{1-q^3} + \ldots\right)\end{aligned}\right.$$

ou bien, en développant en série les termes du second membre,

$$(1+2q^1+2q^4+2q^9+\ldots)^4 = 1 + Aq + Bq^2 + Cq^3 + \ldots,$$

A, B, C, ... désignant des coefficients entiers et essentiellement positifs. Si l'on développait le premier membre, il devrait être identique avec le second; donc toutes les puissances entières de q devraient se trouver dans le premier membre. Or ces diverses puissances sont des sommes de quatre carrés; donc :

Tout nombre entier est la somme de quatre carrés (dont quelques-uns pourront être nuls).

Si l'on se rappelle la formule (p. 262)

$$\sqrt{k} = \frac{2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots},$$

la formule (5) combinée avec (4) donnera

$$\frac{1}{2^4}\left(2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + \ldots\right)^4 = \frac{q}{1-q^2} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \ldots$$

ou bien

$$\left(q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + \ldots\right)^4 = Aq + Bq^3 + Cq^5 + \ldots,$$

A, B, C, ... étant tous entiers et positifs. Il en résulte que

tout nombre entier impair est de la forme

$$\frac{n^2 + n'^2 + n''^2 + n'''^2}{4},$$

n, n', n'', n''' désignant des nombres impairs ; autrement dit :

Le quadruple d'un nombre impair est la somme de quatre carrés impairs.

XXV. — Formules d'addition.

Considérons la fonction $\mathrm{H}(x+a)\mathrm{H}(x-a) = \theta(x)$; elle satisfait aux relations

$$\theta(x + 2\mathrm{K}) = \theta(x),$$
$$\theta(x + 2\mathrm{K}'\sqrt{-1}) = \theta(x) e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{2\mathrm{K}}2(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})} :$$

elle est donc du second ordre aux périodes $2\mathrm{K}$ et $2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$, et par suite elle est fonction linéaire de deux fonctions quelconques satisfaisant aux mêmes formules ; or $\Theta^2(x)$ et $\mathrm{H}^2(x)$ satisfont à ces équations ; on peut donc poser

$$\mathrm{H}(x+a)\mathrm{H}(x-a) = \mathrm{A}\Theta^2(x) + \mathrm{B}\mathrm{H}^2(x).$$

Pour déterminer A et B, on fera $x = 0$ et $x = a$ successivement, ce qui donnera

$$-\mathrm{H}^2(a) = \mathrm{A}\Theta^2(0),$$
$$0 = \mathrm{A}\Theta^2(a) + \mathrm{B}\mathrm{H}^2(a),$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{A} = -\frac{\mathrm{H}^2(a)}{\Theta^2(0)}, \qquad \mathrm{B} = \frac{\Theta^2(a)}{\Theta^2(0)}$$

et, par suite,

$$\mathrm{H}(x+a)\mathrm{H}(x-a) = \frac{\Theta^2(a)\mathrm{H}^2(x) - \mathrm{H}^2(a)\Theta^2(x)}{\Theta^2(0)}.$$

En raisonnant d'une façon analogue sur les fonctions

$$\mathrm{H}(x-a)\Theta(x+a), \quad \mathrm{H}(x-a)\mathrm{H}_1(x+a), \quad \ldots,$$

on formera le Tableau de formules que voici :

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}
&H(x-a)H(x+a)=\frac{\Theta^2(a)H^2(x)-H^2(a)\Theta^2(x)}{\Theta^2(0)},\\
&H(x-a)\Theta(x+a)\\
&\quad=\frac{H_1(a)\Theta_1(a)}{H_1(0)\Theta(0)}H(x)\Theta(x)-\frac{H(a)\Theta(a)}{H_1(0)\Theta(0)}H_1(x)\Theta_1(x),\\
&H(x-a)H_1(x+a)\\
&\quad=\frac{\Theta_1(a)\Theta(a)}{\Theta(0)\Theta_1(0)}H(x)H_1(x)-\frac{H(a)\Theta(a)}{\Theta(0)\Theta_1(0)}\Theta(x)\Theta_1(x),\\
&H(x-a)\Theta_1(x+a)\\
&\quad=\frac{H_1(a)\Theta(a)}{H_1(0)\Theta(0)}H(x)\Theta_1(x)-\frac{H(a)\Theta_1(a)}{H_1(0)\Theta(0)}\Theta(x)H_1(x);
\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&\Theta(x-a)\Theta(x+a)=\frac{\Theta^2(a)\Theta^2(x)-H^2(a)H^2(x)}{\Theta^2(0)},\\
&\Theta(x-a)H(x+a)\\
&\quad=\frac{H_1(a)\Theta_1(a)H(x)\Theta(x)+H(a)\Theta(a)H_1(x)\Theta_1(x)}{\Theta_1(0)H_1(0)},\\
&\Theta(x-a)H_1(x+a)\\
&\quad=\frac{\Theta(a)\Theta_1(a)H(x)H_1(x)-H(a)\Theta(a)\Theta(x)\Theta_1(x)}{\Theta(0)\Theta_1(0)},\\
&\Theta(x-a)\Theta_1(x+a)\\
&\quad=\frac{H_1(a)\Theta(a)H(x)\Theta_1(x)-H(a)\Theta_1(a)\Theta(x)H_1(x)}{\Theta(0)H_1(0)}.
\end{aligned}\right.$$

En divisant (1) par (2) et en ayant égard aux formules qui donnent $\operatorname{sn}x$, $\operatorname{cn}x$, $\operatorname{dn}x$ en fonction de $H(x)$, $\Theta(x)$, $H_1(x)$, $\Theta_1(x)$, on trouve

$$\operatorname{sn}(x+a)=\frac{\operatorname{sn}^2x-\operatorname{sn}^2a}{\operatorname{sn}x\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a-\operatorname{sn}a\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x};$$

en multipliant haut et bas par

$$\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x\operatorname{dn}a+\operatorname{sn}a\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x,$$

il vient

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn}(x+a)&=\frac{(\operatorname{sn}^2x-\operatorname{sn}^2a)(\operatorname{sn}x\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a+\operatorname{sn}a\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x)}{\operatorname{sn}^2x\operatorname{cn}^2a\operatorname{dn}^2a-\operatorname{sn}^2a\operatorname{cn}^2x\operatorname{dn}^2x}\\
&=\frac{(\operatorname{sn}^2x-\operatorname{sn}^2a)(\operatorname{sn}x\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a+\operatorname{sn}a\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x)}{\operatorname{sn}^2x(1-\operatorname{sn}^2a)(1-k^2\operatorname{sn}^2a)-\operatorname{sn}^2a(1-\operatorname{sn}^2x)(1-k^2\operatorname{sn}^2x)}.
\end{aligned}$$

En effectuant les calculs indiqués et en observant que $\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a$ entre comme facteur au dénominateur, on a enfin les formules suivantes; en changeant x en a et a en b,

$$\operatorname{sn}(a \pm b) = \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b \pm \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b},$$

$$\operatorname{cn}(a \pm b) = \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b \mp \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b},$$

$$\operatorname{dn}(a \pm b) = \frac{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b \mp k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b},$$

$$\operatorname{tn}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} b \pm \operatorname{tn} b \operatorname{dn} a}{1 \mp \operatorname{tn} a \operatorname{tn} b \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b}.$$

De ces formules on peut en déduire une multitude d'autres qui ont plus ou moins d'analogie avec les formules de la Trigonométrie, par exemple

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn}(a+b) + \operatorname{sn}(a-b) &= G \operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b,\\
\operatorname{sn}(a+b) - \operatorname{sn}(a-b) &= G \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a,\\
\operatorname{cn}(a+b) + \operatorname{cn}(a-b) &= G \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b,\\
\operatorname{cn}(a+b) - \operatorname{cn}(a-b) &= -G \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b,\\
\operatorname{dn}(a+b) + \operatorname{dn}(a-b) &= G \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b,\\
\operatorname{dn}(a+b) - \operatorname{dn}(a-b) &= -G k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b,
\end{aligned}$$

où

$$G = \frac{2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}.$$

XXVI. — Formules usuelles déduites de la considération des fonctions auxiliaires.

Les valeurs de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, pour des valeurs particulières de la variable x se déduisent facilement des propriétés des fonctions Θ, H, Θ_1, H_1 et des formules suivantes qui pourraient servir de définition à $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, si elles ne s'étaient pas tout d'abord présentées dans le calcul des intégrales ordinaires; nous nous bornerons à écrire ces formules,

leur démonstration ne présentant aucune difficulté :

$$\operatorname{sn} x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(x)}{\Theta(x)}, \qquad \operatorname{cn} x = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H_1(x)}{\Theta(x)}, \qquad \operatorname{dn} x = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)},$$

$\operatorname{sn} x$ a pour périodes......... $4K$ et $2K'\sqrt{-1}$,
$\operatorname{cn} x$ a pour périodes......... $4K$ et $2K + 2K'\sqrt{-1}$,
$\operatorname{dn} x$ a pour périodes......... $2K$ et $4K'\sqrt{-1}$,
$\operatorname{sn} x$ s'annule pour........... $x = 0$ et $2K$,
$\operatorname{cn} x$ s'annule pour........... $x = K$ et $-K$,
$\operatorname{dn} x$ s'annule pour........... $x = K + K'\sqrt{-1}$ et $-K + K'\sqrt{-1}$,

$\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ sont infinis pour $x = K'\sqrt{-1}$ et $2K + K'\sqrt{-1}$.

$$\begin{array}{rll}
\operatorname{sn} 0 = 0, & \operatorname{cn} 0 = 1, & \operatorname{dn} 0 = 1, \\
\operatorname{sn} K = 1, & \operatorname{cn} K = 0, & \operatorname{dn} K = k', \\
\operatorname{sn} 2K = 0, & \operatorname{cn} 2K = -1, & \operatorname{dn} 2K = 1. \\
\operatorname{sn} K'\sqrt{-1} = \infty, & \operatorname{cn} K'\sqrt{-1} = \infty, & \operatorname{dn} K'\sqrt{-1} = \infty, \\
\operatorname{sn} 2K'\sqrt{-1} = 0, & \operatorname{cn} 2K'\sqrt{-1} = -1, & \operatorname{dn} 2K'\sqrt{-1} = -1, \\
\operatorname{sn}(2K + K'\sqrt{-1}) = \infty, & \operatorname{cn} = \infty, & \operatorname{dn} = \infty,
\end{array}$$

$$\begin{array}{rll}
\operatorname{sn}(2K + 2K'\sqrt{-1}) = 0, & \operatorname{cn} = +1, & \operatorname{dn} = -1, \\
\operatorname{sn}(K + K'\sqrt{-1}) = \frac{1}{k}, & \operatorname{cn} = -\frac{k'}{k}\sqrt{-1}, & \operatorname{dn} = 0, \\
\operatorname{sn} -x = -\operatorname{sn} x, & \operatorname{cn} = \operatorname{cn} x, & \operatorname{dn} = \operatorname{dn} x, \\
\operatorname{sn}(2K \pm x) = \mp \operatorname{sn} x, & \operatorname{cn} = \mp \operatorname{cn} x, & \operatorname{dn} = \operatorname{dn} x, \\
\operatorname{sn}(K'\sqrt{-1} + x) = \frac{1}{k \operatorname{sn} x}, & \operatorname{cn} = -\frac{\sqrt{-1}}{k} \frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x}, & \operatorname{dn} = -\sqrt{-1} \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x}, \\
\operatorname{sn}(K + x) = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}, & \operatorname{cn} = -k' \frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x}, & \operatorname{dn} = \frac{k'}{\operatorname{dn} x}, \\
\operatorname{sn}(2K'\sqrt{-1} + x) = \operatorname{sn} x, & \operatorname{cn} = -\operatorname{cn} x, & \operatorname{dn} = -\operatorname{dn} x.
\end{array}$$

Quand on change K en $K'\sqrt{-1}$ et K' en $K\sqrt{-1}$, les quantités q ou $e^{-\pi\frac{K'}{K}}$ et p ou $e^{-\pi\frac{K}{K'}}$ se changent l'une dans l'autre; de même k et k' se changent également l'un dans l'autre en

vertu des formules (p. 246 et 150)

$$k = \frac{H_1^2(0)}{\Theta_1^2(0)} = \frac{\eta_1^2(0)}{\theta_1^2(0)} = \frac{\left(2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + \ldots\right)^2}{(1 + 2q + 2q^4 + \ldots)^2}$$
$$= \frac{(1 - 2p + 2p^4 - \ldots)^2}{(1 + 2p + 2p^4 + \ldots)^2},$$
$$k' = \frac{\Theta^2(0)}{\Theta_1^2(0)} = \frac{\theta^2(0)}{\theta_1^2(0)} = \frac{(1 - 2q + 2q^4 - \ldots)^2}{(1 + 2q + 2q^4 + \ldots)^2}$$
$$= \frac{\left(2p^{\frac{1}{4}} + 2p^{\frac{9}{4}} + \ldots\right)^2}{(1 + 2p + 2p^4 + \ldots)^2}.$$

En écrivant alors $\Theta(x, k)$, $H(x, k)$, ..., $\operatorname{sn}(x, k)$ ... au lieu de $\Theta(x)$, $H(x)$, ..., $\operatorname{sn} x$, ..., afin de mettre le module en évidence, on a, en changeant K en $K'\sqrt{-1}$ et $K'\sqrt{-1}$ en K,

$$\Theta(x, k') = 1 - 2p\cos\frac{\pi x}{K'\sqrt{-1}} + 2p^4\cos^2\frac{\pi x}{K'\sqrt{-1}} - \ldots;$$

on en conclut (p. 150)

$$\Theta(x, k') = \eta_1(x\sqrt{-1}, k),$$

de même

$$\Theta_1(x, k') = \theta_1(x\sqrt{-1}, k),$$
$$H(x, k') = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\eta(x\sqrt{-1}, k),$$
$$H_1(x, k') = \theta(x\sqrt{-1}, k),$$

d'où l'on conclut

$$\operatorname{sn}(x\sqrt{-1}, k) = \sqrt{-1}\,\frac{\operatorname{sn}(x, k')}{\operatorname{cn}(x, k')}, \qquad \operatorname{cn}(x\sqrt{-1}, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(x, k')},$$
$$\operatorname{dn}(x\sqrt{-1}, k) = \frac{\operatorname{dn}(x, k')}{\operatorname{cn}(x, k')}.$$

XXVII. — Théorème de M. Mittag-Leffler.

Étant données des fonctions partout synectiques

$$G_1\left(\frac{1}{x - a_1}\right), \quad G_2\left(\frac{1}{x - a_2}\right), \quad \ldots,$$

excepté en $a_1, a_2, \ldots,$ et par conséquent que l'on peut supposer développées en séries entières par rapport à $\frac{1}{x - a_1}$,

$\frac{1}{x-a_2}$, ..., *il existera des polynômes* P_1, P_2, ... *entiers en* x *qui rendront convergente la série*

(1) $$(P_1+G_1)+(P_2+G_2)+\ldots+(P_n+G_n)+\ldots$$

partout excepté en $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

En effet, décrivons de l'origine comme centre avec un rayon infini R un cercle, décrivons autour de chaque point a_ν comme centre un autre cercle de rayon r_ν assez petit pour qu'il ne contienne aucun des autres points $a_1, a_2, \ldots$; si c'est possible on aura

$$2\pi\sqrt{-1}\,G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)=\int_R G_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right)\frac{dz}{z-x}-\int_{r_\nu} G_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right)\frac{dz}{z-x},$$

les intégrales étant prises le long des cercles de rayon R et r_ν. La fonction $G\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right)\frac{z}{z-x}$ tendant vers zéro pour $z=\infty$ (p. 247, t. III), la première intégrale qui figure dans cette formule sera nulle et l'on aura

$$\begin{aligned}2\pi\sqrt{-1}\,G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)&=-\int_{r_\nu} G_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right)\frac{dz}{x-z}\\&=-\int_{r_\nu} G_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right)\left[\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}+\ldots+\frac{x^{\mu-1}}{z^\mu}+\frac{x^\mu}{z^\mu(z-x)}\right]dz;\end{aligned}$$

nous pourrons donc poser

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)=-P_\nu-\int_{r_\nu} G_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right)\frac{x^\mu}{z^\mu(z-x)}\frac{dz}{2\pi\sqrt{-1}},$$

P_ν désignant un polynôme entier en x de degré μ que nous allons déterminer de manière à rendre la série (1) ou, ce qui revient au même,

(2) $$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\int_{r_\nu} G_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right)\frac{x^\mu}{(z-x)z^\mu}\,dz$$

convergente.

Soit α_ν le module de a_ν; soient M_ν le maximum du module de G_ν sur le cercle r_ν, ρ le module de x : le terme général de la série (2) aura un module inférieur à

$$\int_0^{2\pi} M_\nu \frac{\rho^\mu r_\nu}{(\alpha_\nu - r_\nu)^\mu(\alpha_\nu - r_\nu - \rho)}\, d\theta$$

ou à

$$2\pi M_\nu \frac{\rho^\mu r_\nu}{(\alpha_\nu - r_\nu)^\mu(\alpha_\nu - r_\nu - \rho)},$$

la série (2), et par suite (1), sera convergente si μ est choisi de manière à rendre

$$\sum \frac{M_\nu \rho^\mu r_\nu}{(\alpha_\nu - r_\nu)^\mu(\alpha_\nu - r_\nu - \rho)}$$

convergente, ce qui est toujours possible en prenant μ assez grand, puisque ρ finit par devenir plus petit que $a_\nu - r_\nu$.

Alors la série (1) représente une fonction synectique de x excepté en a_1, a_2, ..., qui sont des points essentiels. Elle représente même, à une fonction synectique près pouvant avoir un point essentiel à l'infini, la fonction la plus générale douée des points essentiels a_1, a_2, ...

XXVIII. — Théorème de Liouville.

Soit $f(x)$ une fonction du second ordre possédant les périodes ω, ϖ et les infinis α, $s - \alpha$. Soit $F(x)$ une fonction possédant les mêmes périodes et les infinis β_1, β_2, ..., β_p. L'intégrale de $\frac{F(z)\,dz}{f(z) - f(x)}$ prise le long d'un parallélogramme des périodes est nulle; cette intégrale peut être remplacée par une somme de résidus. Les résidus relatifs aux infinis x et $s - x$ de $\frac{F(z)}{f(z) - f(x)}$ sont $\frac{F(x)}{f'(x)}$ et $\frac{F(s - x)}{f'(s - x)}$; en observant que $f(x)$ est égal à $f(s - x)$, ou que $f'(x)$ est égal et de signe contraire à $f'(s - x)$, la somme de ces résidus est

$$\frac{F(x) - F(s - x)}{f'(x)};$$

on a donc

$$\frac{F(x)-F(s-x)}{f'(x)}=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{F(z)}{f(x)-f(z)}\,dz,$$

l'intégrale étant prise autour des seuls infinis de $F(z)$, ou, si l'on veut,

$$(1)\qquad F(x)-F(s-x)=f'(x)\,\mathcal{E}\frac{F(z)}{f(x)-f(z)}.$$

En traitant la fonction $\frac{f'(z)F(z)}{f(z)-f(x)}$ comme la précédente, et observant que la somme des résidus relatifs aux infinis α, $s-\alpha$, x, $s-x$ est

$$F(x)+F(s-x)-F(\alpha)-F(s-\alpha),$$

on a

$$(2)\quad F(x)+F(s-x)=F(\alpha)+F(s-\alpha)+\mathcal{E}\frac{F(z)f'(z)}{f(x)-f(z)}.$$

Or de (1) et (2) on tire

$$(3)\quad F(x)=\frac{1}{2}[F(\alpha)+F(s-\alpha)]+\frac{1}{2}\,\mathcal{E}\frac{F(z)[f'(x)+f'(z)]}{f(x)-f(z)}$$

ou, en appelant μ l'ordre de multiplicité de l'infini β,

$$(4)\quad \begin{cases} F(x)=\frac{1}{2}[F(\alpha)+F(s-\alpha)] \\ \qquad\qquad +\frac{1}{2}\sum\frac{1}{(\mu-1)!}\frac{d^{\mu-1}}{d\beta^{\mu-1}}\left[\frac{f'(x)+f'(\beta)}{f(x)-f(\beta)}\,\theta(\beta)\right],\end{cases}$$

où l'on a posé

$$\theta_i(z)=\frac{F(z)}{(z-\beta_i)^{-\mu}}=F(z)(z-\beta_i)^{\mu}.$$

Dans le cas où les infinis de $F(z)$ sont simples, on a

$$(4\,bis)\quad F(x)=\frac{1}{2}[F(\alpha)+F(s-\alpha)]+\frac{1}{2}\sum\frac{\theta(\beta)[f'(x)+f'(\beta)]}{f(x)-f(\beta)}.$$

Si la fonction $F(x)$ avait des points essentiels, la formule (3) aurait encore lieu, mais, pour pouvoir l'appliquer, il faudrait

se donner la *nature* de ces points essentiels, c'est-à-dire les fonctions G considérées dans le théorème de M. Mittag-Leffler. Un point essentiel a de $F(a)$ donnant lieu à un développement

$$G\left(\frac{1}{x-a}\right)=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_i}{(x-a)^i}+\ldots$$

introduira dans la formule (4) ou (4 *bis*) des termes de la forme

$$\frac{1}{2}\left[A_1\frac{f'(x)+f'(a)}{f(x)-f(a)}+\frac{A_2}{1}\frac{d}{da}\frac{f'(x)+f'(a)}{f(x)+f(a)}\right.$$
$$\left.+\frac{A_3}{1.2}\frac{d^2}{da^2}\frac{f'(x)+f'(a)}{f(x)-f(a)}+\ldots\right].$$

De là on conclut le théorème énoncé par Liouville :

Toute fonction aux périodes ω, ϖ *peut s'exprimer en fonction rationnelle d'une fonction aux mêmes périodes du second ordre et de sa dérivée si elle n'a pas de points essentiels.*

Mais Liouville n'avait pas donné la forme de la fonction $F(x)$ au moyen de $f(x)$. Je l'ai donnée pour la première fois en 1878 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Les formules précédentes ont besoin d'être modifiées quand les fonctions f et F ont des infinis communs; alors, au lieu de développer $F(x)$, on développe le quotient de $F(x)$ par une puissance convenable de $f(x)$.

XXIX. — Formules d'addition.

Appliquons le théorème de Liouville à la recherche de $\operatorname{sn}(x+a)$ en fonction de $\operatorname{sn} x$. Si, dans la formule (4 *bis*) du paragraphe précédent

$$2F(x)=F(\alpha)+F(s-\alpha)+\Sigma\theta(\beta)\frac{f'(x)+f'(\beta)}{f(x)-f(\beta)},$$

on fait

$$F(x) = \operatorname{sn}(x+a), \qquad f(x) = \operatorname{sn} x,$$

on aura

$$\alpha = K'\sqrt{-1}, \quad s = 2K, \quad \beta_1 = K'\sqrt{-1} - a, \quad \beta_2 = 2K + K'\sqrt{-1} - a,$$

$$\theta_1(x) = \operatorname{sn}(x+a)(x - K'\sqrt{-1} + a),$$
$$\theta_2(x) = \operatorname{sn}(x+a)(x - K'\sqrt{-1} - 2K + a)$$

ou

$$\operatorname{sn}(x+a)(x + K'\sqrt{-1} + 2K + a).$$

Or on a

$$\operatorname{sn} x = \frac{1}{k \operatorname{sn}(x + K'\sqrt{-1})} = \frac{1}{k \operatorname{sn}(x - K'\sqrt{-1})},$$

donc

$$\theta_1 = \frac{x - K'\sqrt{-1} + a}{k \operatorname{sn}(x + a - K'\sqrt{-1})}$$

et, par suite,

$$\theta_1(\beta_1) = \frac{1}{k}.$$

On a de même

$$\theta_2 = \frac{x - 2K - K'\sqrt{-1} + a}{k \operatorname{sn}(x + a + K'\sqrt{-1})} = -\frac{x - 2K - K'\sqrt{-1} + a}{k \operatorname{sn}(2K + K'\sqrt{-1} - x - a)};$$

donc

$$\theta_2(\beta_2) = -\frac{1}{k}.$$

Enfin $F(\alpha)$ et $F(s-\alpha)$ sont égaux à $\operatorname{sn}(a + K'\sqrt{-1})$ et à $\operatorname{sn}(a - 2K - K'\sqrt{-1})$; ils sont donc égaux et de signes contraires; on a donc seulement

$$2\operatorname{sn}(x+a) = \frac{1}{k}\,\frac{\operatorname{sn}' x + \operatorname{sn}'(K'\sqrt{-1} - a)}{\operatorname{sn} x - \operatorname{sn}(K'\sqrt{-1} - a)} - \frac{1}{k}\,\frac{\operatorname{sn}' x + \operatorname{sn}'(2K + K'\sqrt{-1} - a)}{\operatorname{sn} x - \operatorname{sn}(2K + K'\sqrt{-1} - a)}$$

ou bien

$$2k \operatorname{sn}(x+a) = \frac{\operatorname{sn}' x + \operatorname{sn}'(K'\sqrt{-1} - a)}{\operatorname{sn} x - \operatorname{sn}(K'\sqrt{-1} - a)} - \frac{\operatorname{sn}' x - \operatorname{sn}'(K'\sqrt{-1} - a)}{\operatorname{sn} x + \operatorname{sn}(K'\sqrt{-1} - a)}$$

ou bien encore

$$2k\,\mathrm{sn}(x+a) = -\frac{2\,\mathrm{sn}'x\,\mathrm{sn}(K'\sqrt{-1}-a)+2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{sn}'(K'\sqrt{-1}-a)}{\mathrm{sn}^2x-\mathrm{sn}^2(K'\sqrt{-1}-a)}.$$

Or

$$\mathrm{sn}(K'\sqrt{-1}-a) = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,a}, \qquad \mathrm{sn}'(K'\sqrt{-1}-a) = \frac{\mathrm{sn}'a}{k\,\mathrm{sn}^2a};$$

donc

$$k\,\mathrm{sn}(x+a) = -\frac{\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{sn}'a+\mathrm{sn}'x\,\mathrm{sn}\,a}{k^2\,\mathrm{sn}^2x\,\mathrm{sn}^2a-1}\,k$$

et enfin

$$\mathrm{sn}(x+a) = \frac{\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{sn}'a+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}'x}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2x\,\mathrm{sn}^2a};$$

c'est la formule déjà trouvée plusieurs fois, car on sait que

$$\mathrm{sn}'a = \mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a, \qquad \mathrm{sn}'x = \mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x.$$

XXX. — Multiplication des fonctions auxiliaires.

Le théorème de Liouville permet de calculer $\mathrm{sn}\,mx$, $\mathrm{cn}\,mx$, $\mathrm{dn}\,mx$ en fonction de $\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{cn}\,x$ et $\mathrm{dn}\,x$, mais on préfère ordinairement employer la marche suivante. On s'appuiera sur les formules (p. 269)

$$(1)\quad \begin{cases} \Theta(x+a)\;\Theta(x-a) = \dfrac{\Theta^2(a)\Theta^2(x)-\mathrm{H}^2(a)\mathrm{H}^2(x)}{\Theta^2(0)}, \\ \mathrm{H}(x+a)\;\mathrm{H}(x-a) = \dfrac{\Theta^2(a)\mathrm{H}^2(x)-\mathrm{H}^2(a)\Theta^2(x)}{\Theta^2(0)}, \\ \Theta_1(x+a)\,\Theta_1(x-a) = \dfrac{\Theta_1^2(a)\Theta^2(x)-\mathrm{H}_1^2(a)\mathrm{H}^2(x)}{\Theta^2(0)}, \\ \mathrm{H}_1(x+a)\mathrm{H}_1(x-a) = \dfrac{\mathrm{H}_1^2(a)\Theta^2(x)-\Theta_1^2(a)\mathrm{H}^2(x)}{\Theta^2(0)}. \end{cases}$$

Désignons d'abord par n un nombre impair, et considérons les fonctions $\Theta(nx)$ et

$$f(x) = \prod \Theta\left(x+\frac{2mK}{n}+\frac{2m'K'\sqrt{-1}}{n}\right),$$

dans laquelle m et m' doivent prendre toutes les valeurs entières comprises entre $-\frac{n-1}{2}$ et $+\frac{n-1}{2}$ inclusivement,

valeurs qui fournissent alors n^2 facteurs au produit $\prod$. Les deux fonctions en question satisfont aux relations

$$\theta(x+2K)=\theta(x),$$
$$\theta(x+2K'\sqrt{-1})=-e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(n^2x+n^2K'\sqrt{-1})};$$

elles ont les mêmes zéros : donc leur rapport est à la fois doublement périodique et toujours fini, donc il est constant; on a donc

$$\Theta(nx)=A\prod\Theta\left(x+\frac{2mK}{n}+\frac{2m'K'\sqrt{-1}}{n}\right);$$

faisant alors usage de la première des formules (1), en groupant convenablement les facteurs du second membre, on trouve

$$\Theta(nx)\Theta^{n^2-1}(0)$$
$$=\Theta(x)\prod\left[\Theta^2(x)-\frac{H^2\left(\frac{2mK}{n}+\frac{2m'K'\sqrt{-1}}{n}\right)}{\Theta^2\left(\frac{2mK}{n}+\frac{2m'K'\sqrt{-1}}{n}\right)}H^2(x)\right];$$

on trouve de même

$$H(nx)\Theta^{n^2-1}(0)$$
$$=nH(x)\prod\left[\Theta^2(x)-\frac{\Theta^2\left(\frac{2mK}{n}+2m'\frac{K'\sqrt{-1}}{n}\right)}{H^2\left(\frac{2mK}{n}+2m'\frac{K'\sqrt{-1}}{n}\right)}H^2(x)\right],$$

$$\Theta_1(nx)\Theta^{n^2-1}(0)$$
$$=\Theta_1(x)\prod\left[\Theta^2(x)-\frac{H_1^2\left(\frac{2mK}{n}+\frac{2m'K'\sqrt{-1}}{n}\right)}{\Theta_1^2\left(\frac{2mK}{n}+\frac{2m'K'\sqrt{-1}}{n}\right)}H^2(x)\right],$$

$$H_1(nx)\Theta^{n^2-1}(0)$$
$$=H_1(x)\prod\left[\Theta^2(x)-\frac{\Theta_1^2\left(\frac{2mK}{n}+\frac{2m'K'\sqrt{-1}}{n}\right)}{H_1^2\left(\frac{2mK}{n}+\frac{2m'K'\sqrt{-1}}{n}\right)}H^2(x)\right].$$

Par division, on déduit de ces formules $\operatorname{sn} nx$, $\operatorname{cn} nx$ et $\operatorname{dn} nx$, et l'on voit que ces quantités sont de la forme

$$\operatorname{sn} nx = \operatorname{sn} x \frac{P}{V}, \qquad \operatorname{cn} nx = \operatorname{cn} x \frac{Q}{V}, \qquad \operatorname{dn} nx = \operatorname{dn} x \frac{R}{V},$$

P, Q, R, V désignant des polynômes en $\operatorname{sn} x$ de degré $n^2 - 1$.

Si n est un nombre pair $2m$, en vertu des formules

$$\operatorname{sn} 2u = \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u},$$

$$\operatorname{cn} 2u = \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u},$$

$$\operatorname{dn} 2u = \frac{\operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{cn}^2 u \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u},$$

on voit que

$$\operatorname{sn} 2mx = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x P}{V},$$

$$\operatorname{cn} 2mx = \frac{Q}{V}, \qquad \operatorname{dn} 2mx = \frac{R}{V}.$$

P sera du degré $4m^2 - 4$, Q, R, V seront du degré $4m^2$ en $\operatorname{sn} x$.

XXXI. — Multiplication des fonctions elliptiques.

Proposons-nous d'évaluer $\operatorname{sn} mx$ en fonction de $\operatorname{sn} x$. Nous distinguerons deux cas, suivant que m sera pair ou impair.

Premier cas : *m impair*. — Les périodes de $\operatorname{sn} mx$ sont $\frac{4K}{m}$ et $\frac{2K'\sqrt{-1}}{m}$, ses infinis sont $\frac{2i+1}{m} 2K + \frac{2i'+1}{m} K'\sqrt{-1}$, ses zéros $\frac{2iK}{m} + \frac{2i'K'\sqrt{-1}}{m}$. Ces zéros et ces infinis sont au nombre de $2m^2$.

On peut grouper les zéros deux à deux, de manière que leur somme fasse $2K$; on peut également grouper les infinis deux à deux, de manière que leur somme fasse $2K$; soient $\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \alpha'_2, \ldots$ les infinis $K'\sqrt{-1}$ et $2K + K'\sqrt{-1}$ excep-

tés; a_1, a'_1, a_2, a'_2, ... les zéros o et $2k$ exceptés. Supposons $\alpha_1 + \alpha'_1 = 2K$, $\alpha_2 + \alpha'_2 = 2K$, ... $a_1 + a'_1 = 2K$, ...; considérons enfin les polynômes

$$P = (\operatorname{sn} x - \operatorname{sn} a_1)\dots(\operatorname{sn} x - \operatorname{sn} a_{m^2-1}),$$
$$Q = (\operatorname{sn} x - \operatorname{sn} \alpha_1)\dots(\operatorname{sn} x - \operatorname{sn} \alpha_{m^2-1}).$$

La fonction $\frac{P \operatorname{sn} x}{Q}$ a les mêmes zéros et les mêmes infinis que $\operatorname{sn} mx$; donc, en appelant C une constante,

$$\operatorname{sn} mx = C \frac{P \operatorname{sn} x}{Q},$$

et $\operatorname{sn} mx$ s'exprime rationnellement en $\operatorname{sn} x$. On peut déterminer la constante C en écrivant

$$\frac{\operatorname{sn} mx}{\operatorname{sn} x} = C \frac{P}{Q}.$$

Si l'on fait $x = 0$, on a

$$m = C \frac{\operatorname{sn} a_1 \operatorname{sn} a_2 \dots \operatorname{sn} a_{m^2-1}}{\operatorname{sn} \alpha_1 \operatorname{sn} \alpha_2 \dots \operatorname{sn} \alpha_{m^2-1}};$$

ainsi C est connu.

Deuxième cas : *m est pair.* — Les infinis de $\operatorname{sn} mz$ peuvent toujours être groupés de façon que la somme des deux infinis d'un même groupe fasse $2K$; aucun de ces infinis ne peut être égal à $K'\sqrt{-1}$ ou à $2K + K'\sqrt{-1}$; cette fois $\operatorname{sn} mz$ n'a pas d'infini commun avec $\operatorname{sn} x$.

Groupons les zéros comme tout à l'heure; les zéros étant de la forme $\frac{2Ki}{m} + \frac{2K'i'}{m}\sqrt{-1}$, ils pourront devenir équivalents à o ou à $2K$ qui sont les zéros de $\operatorname{sn} x$; si l'on a $i' = 0$ et $i = 0$ ou $i' = 0$ et $i = m$, les zéros de $\operatorname{sn}' x = \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$ sont K, $3K$, $K + K'\sqrt{-1}$, $3K + K'\sqrt{-1}$; ceux de $\operatorname{sn} mx$ pourront leur devenir égaux pour $i = \frac{m}{2}$ ou $\frac{3m}{2}$ avec $i' = 0$ ou $i' = \frac{m}{2}$. Formons alors les polynômes

$$U = (\operatorname{sn} x - \operatorname{sn} a_1)\dots(\operatorname{sn} x - \operatorname{sn} a_{m^2-4}),$$
$$V = (\operatorname{sn} x - \operatorname{sn} \alpha_1)\dots(\operatorname{sn} x - \operatorname{sn} \alpha_{m^2}),$$

les quatre zéros communs à $\operatorname{sn} mx$ et à $\operatorname{sn}' x$ ou à $\operatorname{sn} x$ ne figurant pas dans U, et considérons l'expression

$$\frac{U}{V} \operatorname{sn} x \operatorname{sn}' x;$$

elle a les mêmes zéros et les mêmes infinis que $\operatorname{sn} mx$: donc

$$\operatorname{sn} mx = C \frac{U}{V} \operatorname{sn} x \operatorname{sn}' x,$$

C désignant une constante facile à calculer.

Il est facile de voir que les polynômes P, Q, U, V ne contiennent que des puissances paires de $\operatorname{sn} x$, car $\operatorname{sn} mx$ est fonction impaire de $\operatorname{sn} x$.

XXXII. — Méthode d'Abel.

$\operatorname{sn} mu$ est de la forme $\frac{P}{Q}$ ou $\frac{P}{Q}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$, suivant que m est impair ou pair, P et Q désignant des polynômes entiers en $x = \operatorname{sn} u$. Abel a indiqué deux équations différentielles auxquelles satisfont les polynômes P et Q et qui permettent alors de trouver ces polynômes par la méthode des coefficients indéterminés. Posons

$$\sqrt{k} \operatorname{sn} u = x, \qquad \sqrt{k} \operatorname{sn} mu = y,$$

on a

$$du = \frac{dx \frac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{k}\right)\left(1-k^2\frac{x^2}{k}\right)}} = \frac{dy \frac{1}{\sqrt{k}}}{m\sqrt{\left(1-\frac{y^2}{k}\right)\left(1-k^2\frac{y^2}{k}\right)}}$$

ou bien, en posant $k + \frac{1}{k} = 2\alpha$,

$$\frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x^2+x^4}} = \frac{dy}{m\sqrt{1-2\alpha y^2+y^4}}.$$

ou

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 (1-2\alpha x^2+x^4) - m^2(1-2\alpha y^2+y^4) = 0;$$

en différentiant, il vient

$$\frac{d^2 \log y}{dx^2}(1 - 2\alpha x^2 + x^4) + 2\frac{d\log y}{dx}(x^3 - \alpha x) - m^2\left(y^2 - \frac{1}{y^2}\right) = 0;$$

maintenant posons, en supposant m impair,

$$y = \frac{P}{Q},$$

nous aurons

$$\left\{(1 - 2\alpha x^2 + x^4)\left[P\frac{d^2P}{dx^2} - \left(\frac{dP}{dx}\right)^2\right] + 2(x^3 - \alpha x)P\frac{dP}{dx} + m^2Q^2\right\}\frac{1}{P^2}$$
$$= \left\{(1 - 2\alpha x^2 + x^4)\left[Q\frac{d^2Q}{dx^2} - \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2\right] + 2(x^3 - \alpha x)Q\frac{dQ}{dx} + m^2P^2\right\}\frac{1}{Q^2}.$$

P et Q sont des polynômes premiers entre eux; l'équation précédente doit donc se réduire à une égalité entre deux polynômes entiers du second degré, et l'on peut ajouter que ces polynômes sont pairs. En faisant $x = 0$ et $x = \infty$, on voit que chacun des deux membres de la formule précédente est égal à m^2x^2; on a donc

$$(1 - 2\alpha x^2 + x^4)\left[P\frac{d^2P}{dx^2} - \left(\frac{dP}{dx}\right)^2\right]$$
$$+ 2(x^3 - \alpha x)P\frac{dP}{dx} + m^2(Q^2 - x^2P^2) = 0,$$

$$(1 - 2\alpha x^2 + x^4)\left[Q\frac{d^2Q}{dx^2} - \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2\right]$$
$$+ 2(x^3 - \alpha x)Q\frac{dQ}{dx} + m^2(P^2 - x^2Q^2) = 0.$$

Lorsque m est pair, on peut encore poser $y = \frac{P}{Q}$, mais alors P ne sera plus un polynôme entier, mais bien le produit d'un polynôme entier par le radical $\sqrt{1 - 2\alpha x^2 + x^4}$; néanmoins un raisonnement analogue à celui que nous venons de présenter prouve que P et Q satisfont aux mêmes équations différentielles.

XXXIII. — Intégration des fonctions doublement périodiques.

Les fonctions doublement périodiques sont intégrables par les fonctions Θ. Pour le démontrer, considérons une fonction $F(x)$ aux périodes ω et ϖ; soit θ une fonction, telle que

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \theta(x+\omega)=\theta(x)e^{ax+a'}, \\ \theta(x+\varpi)=\theta(x)e^{bx+b'}, \\ a\varpi-b\omega=2i\pi\sqrt{-1}. \end{array}\right.$$

Si l'on considère l'intégrale

$$(2)\qquad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int F(x)\frac{\theta'(z-x)}{\theta(z-x)}\,dz,$$

prise le long d'un parallélogramme des périodes ayant son origine en un point x_0, on la trouvera égale à

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{x_0}^{x_0+\omega}F(z)\left[\frac{\theta'(x_0+z-x)}{\theta(x_0+z-x)}-\frac{\theta'(x_0+\varpi+z-x)}{\theta(x_0+\varpi+z-x)}\right]dz$$
$$+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{x_0}^{x_0+\varpi}F(z)\left[\frac{\theta'(x_0+\omega+z-x)}{\theta(x_0+\omega+z-x)}-\frac{\theta'(x_0+z-x)}{\theta(x_0+z-x)}\right]dz.$$

Or de (1) l'on tire

$$\frac{\theta'(x+\omega)}{\theta(x+\omega)}-\frac{\theta'(x)}{\theta(x)}=a,$$
$$\frac{\theta'(x+\varpi)}{\theta(x+\varpi)}-\frac{\theta'(x)}{\theta(x)}=b;$$

l'intégrale (2) devient alors

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{x_0}^{x_0+\omega}b\,F(z)\,dz-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{x_0}^{x_0+\varpi}a\,F(z)\,dz,$$

quantité indépendante de x_0 que nous appellerons C. D'un autre côté, l'intégrale (2) est égale à la somme des résidus de $F(z)\frac{\theta'(z-x)}{\theta(z-x)}$. Si la fonction θ est alors choisie du premier

ordre et de manière à s'annuler pour $z=x$, le résidu relatif à x sera $F(x)$, et l'on aura

$$C = F(x) + \mathcal{E}((F(z)))\frac{\theta'(z-x)}{\theta(z-x)},$$

la double parenthèse indiquant que le résidu est relatif aux seuls infinis de la fonction $F(z)$; soit α un infini de cette fonction, on aura, en supposant $F(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-\alpha)^n}$,

$$C = F(x) + \mathcal{E}\frac{\varphi(z)}{(z-\alpha)^n}\frac{\theta'(z-x)}{\theta(z-x)}$$

ou

$$F(x) = C - \sum \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\frac{\varphi(z)}{1.2\ldots(n-1)}\frac{\theta'(z-x)}{\theta(z-x)}\right]_{z=\alpha},$$

formule facilement intégrable par rapport à x.

La méthode que nous venons d'indiquer est due à M. Hermite, et nous allons bientôt en faire des applications. Disons toutefois que le calcul d'une intégrale peut être assez simple en lui-même, pour n'avoir pas besoin de recourir au procédé que nous venons de rapporter; ainsi, par exemple, on a

$$\int_0^x \operatorname{sn} x\, dx = \int_0^u \frac{u\, du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

en posant $\operatorname{sn} x = u$; si alors on prend pour variable $z = u^2$, on trouve

$$\int_0^x \operatorname{sn} x\, dx = \int_0^z \frac{\frac{1}{2}\, dz}{\sqrt{1-(1+k^2)z+k^2z^2}},$$

et l'intégration s'effectue sans difficulté.

XXXIV. — Cas où les périodes de la fonction à intégrer sont $2K$ et $2K'\sqrt{-1}$.

Si la fonction $f(z)$ a pour périodes $2K$ et $2K'\sqrt{-1}$, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int f(z)\frac{H'(z-x)}{H(z-x)}\, dz,$$

prise le long du parallélogramme des périodes, a une valeur constante C, et cette constante est égale au résidu

$$\mathcal{E} f(z) \frac{H'(z-x)}{H(z-x)}$$

ou, en appelant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ les infinis de $f(z)$,

$$f(x) + \sum \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{H'(z-x)}{H(z-x)} \varphi(z) \right]_{z=\alpha},$$

en posant, pour abréger, $f(z) = \varphi(z)(z-\alpha)^n$, n désignant l'ordre de multiplicité de l'infini α.

On voit ainsi que $f(x)$ est développable en une suite de la forme

$$f(x) = C + \sum A \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \sum B \frac{d}{dx} \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \ldots,$$

éminemment propre à l'intégration : C, A, B, ... sont des coefficients à déterminer; quant aux coefficients A, ils satisfont à la relation

$$\sum A = 0;$$

en effet ΣA est le résidu de $f(z)$ relatif au parallélogramme des périodes.

Si la fonction f avait des points essentiels, son développement se ferait d'une manière analogue, mais il se présenterait sous la forme d'une série; pour l'effectuer, il faudrait se donner la nature des points essentiels (*voir* § 28).

XXXV. — De l'intégrale elliptique de seconde espèce.

L'intégrale elliptique de seconde espèce

$$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

se transforme en

$$\int_0^x \operatorname{sn}^2 x\,dx,$$

quand on y remplace x par $\operatorname{sn} x$, et c'est cette intégrale que nous allons étudier.

Décomposons à cet effet $\operatorname{sn}^2 x$ en éléments simples par la méthode de M. Hermite. Ses périodes étant $2K$ et $2K'\sqrt{-1}$, on posera

$$C = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \operatorname{sn}^2 x \frac{H'(z-x)}{H(z-x)} dz,$$

l'intégrale étant prise le long d'un parallélogramme des périodes, et, comme $H(z-x)$ n'a qu'un zéro x, on aura

$$(1) \qquad C = \operatorname{sn}^2 x + \mathcal{E}((\operatorname{sn}^2 z)) \frac{H'(z-x)}{H(z-x)}.$$

Or on a

$$\operatorname{sn} x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(x)}{\Theta(x)};$$

$\operatorname{sn}^2 x$ n'a qu'un infini, mais il est double, et il est égal à $K'\sqrt{-1}$. En changeant x en $K\sqrt{-1} + h$ dans la formule précédente, on trouve

$$\operatorname{sn}(K\sqrt{-1} + h) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(K'\sqrt{-1} + h)}{\Theta(K'\sqrt{-1} + h)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\Theta(h)}{H(h)};$$

le résidu qui entre dans la formule (1) est le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de

$$\operatorname{sn}^2(K\sqrt{-1} + h) \frac{H'(K\sqrt{-1} - x + h)}{H(K\sqrt{-1} - x - h)}$$
$$= \frac{1}{k} \frac{\Theta^2(h)}{H^2(h)} \left[\frac{\Theta'(h-x)}{\Theta(h-x)} - \frac{\pi\sqrt{-1}}{2K} \right]$$

ou de

$$\frac{1}{k^2} \frac{1}{\operatorname{sn}^2 h} \left[\frac{\Theta'(h-x)}{\Theta(h-x)} - \frac{\pi\sqrt{-1}}{2K} \right].$$

or la limite de $\frac{\operatorname{sn} h}{h}$ pour $h = 0$ étant un, le résidu cherché sera

$$\frac{1}{k^2} \frac{d}{dx} \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \frac{1}{k^2} \frac{\Theta''(x)\Theta(x) - \Theta'^2(x)}{\Theta^2(x)};$$

on aura donc

$$C = \mathrm{sn}^2 x + \frac{1}{k^2} \frac{\Theta''(x)\Theta'(x) - \Theta'^2(x)}{\Theta^2(x)}$$

et, pour $x = 0$,

$$C = \frac{1}{k^2} \frac{\Theta''(0)}{\Theta^2(0)},$$

d'où l'on tire

$$k^2 \,\mathrm{sn}^2 x = \frac{\Theta''(0)}{\Theta^2(0)} - \frac{\Theta''(x)\Theta'(x) - \Theta'^2(x)}{\Theta^2(x)}.$$

Si l'on intègre et si l'on pose

$$Z(x) = \int_0^x k^2 \,\mathrm{sn}^2 x \, dx,$$

on a finalement l'expression que Jacobi appelle l'intégrale de seconde espèce $Z(x)$, à savoir

$$Z(x) = \frac{\Theta''(0)}{\Theta^2(0)} x - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}.$$

La fonction $Z(x)$ est donc monodrome et monogène et s'exprime au moyen de la fonction Θ; réciproquement on peut avoir Θ en fonction de $Z(x)$. En effet, de l'équation précédente on tire

$$\int_0^x Z(x)\, dx = \frac{\Theta''(0)}{\Theta^2(0)} \frac{x^2}{2} - \log \frac{\Theta(x)}{\Theta(0)}$$

et, par suite,

$$e^{-\int_0^x Z(x) dx} = e^{-\frac{\Theta''(0)}{\Theta^2(0)} \frac{x^2}{2}} \frac{\Theta(x)}{\Theta(0)},$$

$$\Theta(x) = \Theta(0) e^{\frac{\Theta''(0)}{\Theta^2(0)} \frac{x^2}{2} - \int_0^x Z\, dx}.$$

XXXVI. — Addition des fonctions de deuxième espèce.

On a trouvé, en posant $\zeta = \dfrac{\Theta''(0)}{\Theta^2(0)}$,

$$Z(x) = \int_0^x k^2 \,\mathrm{sn}^2 x \, dx = \zeta x - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)};$$

on en conclut

$$Z(x+y) = \zeta(x+y) - \frac{\Theta'(x+y)}{\Theta(x+y)},$$

$$Z(x-y) = \zeta(x-y) - \frac{\Theta'(x-y)}{\Theta(x-y)};$$

donc

$$Z(x+y) + Z(x-y) - 2Z(x) = 2\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta'(x+y)}{\Theta(x+y)} - \frac{\Theta'(x-y)}{\Theta(x-y)}$$

ou bien

$$Z(x+y) + Z(x-y) - 2Z(x) = -\frac{d}{dx}\log\frac{\Theta(x+y)\Theta(x-y)}{\Theta^2(x)}.$$

Or on a trouvé (p. 269)

$$\Theta(x+y)\Theta(x-y) = \frac{\Theta^2(x)\Theta^2(y) - H^2(x)H^2(y)}{\Theta^2(0)};$$

la formule précédente devient alors

$$Z(x+y)+Z(x-y)-2Z(x) = -\frac{d}{dx}\log\frac{\Theta^2(x)\Theta^2(y)-H^2(x)H^2(y)}{\Theta^2(x)\Theta^2(y)},$$

où nous avons introduit sous le signe $\frac{d}{dx}$ la constante $\frac{\Theta^2(0)}{\Theta^2(y)}$; en ayant égard aux formules qui donnent $\operatorname{sn} x$ (p. 262), on a

$$Z(x+y) + Z(x-y) - 2Z(x) = -\frac{d}{dx}\log(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y)$$

ou, finalement,

$$Z(x+y) + Z(x-y) - 2Z(x) = \frac{2k^2 \operatorname{sn}^2 y \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y}.$$

Changeons x en y et y en x, en observant que

$$Z(-x) = -Z(x),$$

on a

$$Z(x+y) - Z(x-y) - 2Z(y) = \frac{2k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y \operatorname{dn} y}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y};$$

en combinant cette formule avec la précédente, il vient

$$Z(x+y) = Z(x) + Z(y) + \frac{k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} y (\operatorname{sn} y \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} x \operatorname{dn} y \operatorname{cn} y)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y}$$

ou bien

$$(1) \qquad Z(x+y) = Z(x) + Z(y) + k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} y \operatorname{sn}(x+y).$$

C'est dans cette formule que consiste le théorème de l'addition des fonctions de seconde espèce. On en déduit, en changeant y en $-y$,

$$Z(x-y) = Z(x) - Z(y) - k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} y \operatorname{sn}(x-y).$$

Ces formules, comme on le verra, sont susceptibles d'une interprétation géométrique remarquable.

XXXVII. — Intégrale elliptique de troisième espèce.

L'intégrale de troisième espèce, que l'on peut mettre sous la forme

$$\int_0^z \frac{1}{1-n^2 z^2} \frac{z^2\, dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}},$$

prend la forme suivante quand on y fait $z = \operatorname{sn} x$ et $n = k \operatorname{sn} a$:

$$\int_0^x \frac{dx \operatorname{sn}^2 x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x}.$$

Pour obtenir sa valeur, nous décomposerons $\dfrac{\operatorname{sn}^2 x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x}$ en éléments simples; à cet effet, nous poserons

$$C = \int \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{dz \operatorname{sn}^2 z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 z} \frac{H'(z-x)}{H(z-x)},$$

la fonction $\dfrac{\operatorname{sn}^2 x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 a}$ ayant pour périodes $2K$ et $2K'\sqrt{-1}$, si l'on suppose l'intégrale prise le long d'un parallélogramme des périodes, la quantité C sera constante et l'on aura, en

observant que $H(z-x)$ s'annule seulement pour $z=x$,

$$C = \frac{\operatorname{sn}^2 x}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x} + \mathcal{E} \frac{\operatorname{sn}^2 z}{((1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 z))} \frac{H'(z-x)}{H(z-x)}.$$

Pour évaluer le résidu qui figure ici, nous commencerons par résoudre l'équation

$$1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 z = 0,$$

que l'on peut écrire

$$k^2\operatorname{sn}^2 a = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 z} = k\frac{\Theta^2(z)}{H^2(z)} = k\frac{H^2(z+K'\sqrt{-1})}{\Theta^2(z+K'\sqrt{-1})}$$
$$= k^2\operatorname{sn}^2(z+K'\sqrt{-1})$$

ou

$$\operatorname{sn}^2 a = \operatorname{sn}^2(z+K'\sqrt{-1});$$

on tire de là

$$\operatorname{sn} a = \pm\operatorname{sn}(z+K'\sqrt{-1}),$$

d'où l'on conclut

$$z = \pm a + K'\sqrt{-1};$$

le résidu que nous cherchons sera alors

$$\lim\left[\frac{z-a-K'\sqrt{-1}}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 z}\operatorname{sn}^2 z\frac{H'(z-x)}{H(z-x)}\right] + \lim\left[\frac{z+a-K'\sqrt{-1}}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 z}\operatorname{sn}^2 z\frac{H'(z-x)}{H(z-x)}\right]$$

ou, au signe près,

$$\frac{\operatorname{sn}^2(a+K'\sqrt{-1})}{2k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{cn}(a+K'\sqrt{-1})\operatorname{dn}(a+K'\sqrt{-1})}\frac{H'(a+K'\sqrt{-1}-x)}{H(a+K'\sqrt{-1}-x)}$$
$$+\frac{\operatorname{sn}^2(a-K'\sqrt{-1})}{2k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{cn}(a-K'\sqrt{-1})\operatorname{dn}(a-K'\sqrt{-1})}\frac{H'(-a+K'\sqrt{-1}-x)}{H(-a+K'\sqrt{-1}-x)}$$

ou enfin

$$-\frac{1}{2k^2\operatorname{sn} a\operatorname{cn} a\operatorname{dn} a}\left[\frac{\Theta'(x-a)}{\Theta(x-a)} - \frac{\Theta'(x+a)}{\Theta(x+a)}\right];$$

on en conclut

$$C = \frac{\operatorname{sn}^2 x}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 x} - \frac{1}{2k^2\operatorname{sn} a\operatorname{cn} a\operatorname{dn} a}\left[\frac{\Theta'(x-a)}{\Theta(x-a)} - \frac{\Theta'(x+a)}{\Theta(x+a)}\right].$$

Pour $x=0$, on trouve

$$C=-2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\frac{1}{2k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a};$$

on en conclut

$$\frac{2k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\operatorname{sn}^2x}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2x}=\frac{\Theta'(x-a)}{\Theta(x-a)}-\frac{\Theta'(x+a)}{\Theta(x+a)}+2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}$$

et, par suite,

$$\int_0^x\frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\operatorname{sn}^2x}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2x}\,dx=\frac{x\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}.$$

On voit, en résumé, que toutes les fonctions elliptiques dépendent d'une seule et même fonction Θ.

Si l'on pose, avec Jacobi,

$$\text{(1)}\qquad \Pi(x,a)=\int_0^x\frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\operatorname{sn}^2x}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2x}\,dx,$$

la formule précédente s'écrira

$$\text{(2)}\qquad \Pi(x,a)=\frac{x\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}$$

et, en changeant x en a et a en x,

$$\Pi(a,x)=\frac{a\Theta'(x)}{\Theta(x)}+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(a-x)}{\Theta(a+x)};$$

en soustrayant ces deux équations l'une de l'autre, on a

$$\Pi(x,a)-\Pi(a,x)=\frac{x\Theta'(a)}{\Theta(a)}-\frac{a\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\Pi(x,a)-\Pi(a,x)=xZ(a)-aZ(x).$$

C'est dans ces dernières égalités que consiste ce que l'on appelle l'*échange du paramètre et de l'argument*.

Si l'on divise les deux membres de (1) par a et si l'on fait $a=0$, on trouve

$$\lim\frac{\Pi(x,a)}{a}=\int_0^x k^2\operatorname{sn}^2x\,dx,$$

c'est-à-dire

$$\lim \frac{\Pi(x, a)}{a} = Z(x).$$

La formule (2) donne alors la formule du paragraphe précédent

$$Z(x) = \zeta x + \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}.$$

XXXVIII. — Intégrales complètes.

Les quantités

$$J = \int_0^K k^2 \operatorname{sn}^2 x \, dx = Z(K),$$

$$\sqrt{-1}\, J' = \int_K^{K+K'\sqrt{-1}} k^2 \operatorname{sn}^2 x \, dx = Z(K + K'\sqrt{-1}) - Z(K)$$

s'appellent les *intégrales complètes de seconde espèce;* si, dans la formule

$$Z(x) = \zeta x - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$

on fait $x = K$, on a

$$(a) \qquad J = \zeta K;$$

si, dans la même formule, on fait $x = K + K'\sqrt{-1}$, on a

$$(b) \qquad J + J'\sqrt{-1} = \zeta(K + K'\sqrt{-1}) - \frac{\Theta'(K + K'\sqrt{-1})}{\Theta(K + K'\sqrt{-1})};$$

or

$$\Theta(x + K'\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\, H(x) e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2K}\left(x + \frac{K'}{2}\sqrt{-1}\right)},$$

d'où

$$\frac{\Theta'(x + K'\sqrt{-1})}{\Theta(x + K'\sqrt{-1})} = \frac{H'(x)}{H(x)} - \frac{\pi\sqrt{-1}}{2K}$$

et, en faisant $x = K$,

$$\frac{\Theta'(K + K'\sqrt{-1})}{\Theta(K + K'\sqrt{-1})} = \frac{H'(K)}{H(K)} - \frac{\pi\sqrt{-1}}{2K}$$

Donc (b) donne

$$J + J'\sqrt{-1} = \zeta(K + K'\sqrt{-1}) - \frac{H'(K)}{H(K)} + \frac{\pi\sqrt{-1}}{2K}$$

et, en vertu de (a),

$$J'\sqrt{-1} = \zeta K'\sqrt{-1} - \frac{H'(K)}{H(K)} + \frac{\pi\sqrt{-1}}{2K}.$$

Mais, si l'on forme la dérivée de $H(x)$ et que l'on y fasse $x = K$, on trouve $H'(K) = 0$; donc

$$J'\sqrt{-1} = \zeta K'\sqrt{-1} + \frac{\pi\sqrt{-1}}{2K}$$

ou

$$(b) \qquad J' = \zeta K' + \frac{\pi}{2K};$$

si l'on rapproche cette équation de (a) et si l'on élimine ζ, on a

$$(3) \qquad J'K - K'J = \frac{\pi}{2},$$

relation remarquable entre les intégrales complètes.

Il est facile de voir d'ailleurs que

$$Z(x + 2K) = Z(x) + 2J,$$
$$Z(x + 2K'\sqrt{-1}) = Z(x) + 2J'\sqrt{-1}.$$

Si, dans l'équation

$$\Pi(x, a) - \Pi(a, x) = a\,Z(x) - x\,Z(a),$$

on fait $x = K$ et $x = K + K'\sqrt{-1}$, en posant $\Pi(K, a) = \Pi$, $\Pi(K + K'\sqrt{-1}, a) - \Pi(K, a) = \Pi'\sqrt{-1}$ et en observant que

$$\Pi(a, K) = 0 \qquad \text{et} \qquad \Pi(a, K + K'\sqrt{-1}) = 0,$$

on a

$$\Pi = \Pi(K, a) = a\,J - K\,Z(a),$$

$$\sqrt{-1}\,\Pi' = a\,J'\sqrt{-1} - K'Z(a)\sqrt{-1};$$

en combinant ces équations de manière à éliminer $Z(a)$, on trouve, en vertu de (3),

$$K\Pi' - \Pi K' = \frac{a\pi}{2}.$$

XXXIX. — Les fonctions Al de Weierstrass.

Reprenons la formule

$$Z(x) = \zeta x - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)};$$

on en tire

$$\int_0^x Z(x)\,dx = \zeta\frac{x^2}{2} - \log\frac{\Theta(x)}{\Theta(0)}$$

et

$$e^{-\int_0^x Z(x)dx} = e^{-\zeta\frac{x^2}{2}}\frac{\Theta(x)}{\Theta(0)}.$$

C'est cette fonction que M. Weierstrass désigne par $\mathrm{Al}(x)$: il pose

$$\begin{aligned}
\mathrm{Al}\,x &= e^{-\int_0^x Z(x)dx} &&= e^{-\zeta\frac{x^2}{2}}\frac{\Theta(x)}{\Theta(0)},\\
\mathrm{Al}_1 x &= \mathrm{Al}\,x\,\mathrm{sn}\,x &&= e^{-\zeta\frac{x^2}{2}}\frac{H(x)}{\Theta(0)}\frac{1}{\sqrt{k}},\\
\mathrm{Al}_2 x &= \mathrm{Al}\,x\,\mathrm{cn}\,x &&= e^{-\zeta\frac{x^2}{2}}\frac{H_1(x)}{\Theta(0)}\sqrt{\frac{k'}{k}},\\
\mathrm{Al}_3 x &= \mathrm{Al}\,x\,\mathrm{dn}\,x &&= e^{-\zeta\frac{x^2}{2}}\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(0)}\sqrt{k'};
\end{aligned}$$

on a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Al}_2^2 x + \mathrm{Al}_1^2 x &= \mathrm{Al}^2 x,\\
\mathrm{Al}_3^2 x + k^2\,\mathrm{Al}_1^2 x &= \mathrm{Al}^2 x.
\end{aligned}$$

Les fonctions Al ne sont plus périodiques, mais elles appartiennent encore à la classe des fonctions auxiliaires ou fonctions thêta. Les formules relatives aux fonctions Θ donnent

$$\begin{aligned}
\mathrm{Al}\,(x+2K) &= \mathrm{Al}\,x\,e^{-2J(x+K)},\\
\mathrm{Al}_1(x+2K) &= -\mathrm{Al}_1 x\,e^{-2J(x+K)},\\
\mathrm{Al}_2(x+2K) &= -\mathrm{Al}_2 x\,e^{-2J(x+K)},\\
\mathrm{Al}_3(x+2K) &= \mathrm{Al}_3 x\,e^{-2J(x+K)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Al}\,(x+2K'\sqrt{-1}) &= -\mathrm{Al}\,x\,e^{-2J'\sqrt{-1}(x+K'\sqrt{-1})},\\
\mathrm{Al}_1(x+2K'\sqrt{-1}) &= -\mathrm{Al}_1 x\,e^{-2J'\sqrt{-1}(x+K'\sqrt{-1})},\\
\mathrm{Al}_2(x+2K'\sqrt{-1}) &= \mathrm{Al}_2 x\,e^{-2J'\sqrt{-1}(x+K'\sqrt{-1})},\\
\mathrm{Al}_3(x+2K'\sqrt{-1}) &= \mathrm{Al}_3 x\,e^{-2J'\sqrt{-1}(x+K'\sqrt{-1})}
\end{aligned}$$

XL. — Utilité des fonctions Al pour le développement en série.

Les fonctions Θ sont développables en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de x, mais ces fonctions sont loin de se développer aussi facilement que les fonctions Al, dans le développement desquelles le module entre sous forme entière. Pour effectuer le développement des fonctions Al, on part d'équations linéaires que nous allons d'abord établir.

On a trouvé

$$Z(x) = \int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2 x \, dx = \zeta x - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$

donc

$$\frac{d^2 \log \Theta(x)}{dx^2} + k^2 \operatorname{sn}^2 x = \zeta;$$

si, dans cette formule, on remplace x par $x + \mathrm{K}$,

$$x + \mathrm{K}'\sqrt{-1}, \qquad x + \mathrm{K} + \mathrm{K}'\sqrt{-1},$$

on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \log \Theta(x)}{dx^2} &+ k^2 \operatorname{sn}^2 x = \zeta, \\
\frac{d^2 \log \mathrm{H}(x)}{dx^2} &+ \frac{1}{\operatorname{sn}^2 x} = \zeta, \\
\frac{d^2 \log \Theta_1(x)}{dx^2} &+ k^2 \frac{\operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x} = \zeta, \\
\frac{d^2 \log \mathrm{H}_1(x)}{dx^2} &+ \frac{\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x} = \zeta.
\end{aligned}$$

En introduisant alors les fonctions Al, on a

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\mathrm{Al} \frac{d^2 \mathrm{Al}}{dx^2} - \left(\frac{d\mathrm{Al}}{dx}\right)^2 + k^2 \mathrm{Al}_1^2 = 0, \\
&\mathrm{Al}_1 \frac{d^2 \mathrm{Al}_1}{dx^2} - \left(\frac{d\mathrm{Al}_1}{dx}\right)^2 + \mathrm{Al}^2 = 0, \\
&\mathrm{Al}_2 \frac{d^2 \mathrm{Al}_2}{dx^2} - \left(\frac{d\mathrm{Al}_2}{dx}\right)^2 + \mathrm{Al}_3^2 = 0, \\
&\mathrm{Al}_3 \frac{d^2 \mathrm{Al}_3}{dx^2} - \left(\frac{d\mathrm{Al}_3}{dx}\right)^2 + k^2 \mathrm{Al}_2^2 = 0
\end{aligned} \right.$$

Ces équations du second ordre sont éminemment propres au développement en série par la formule de Taylor, car on peut en déduire les dérivées successives des Al; nous n'effectuerons pas ce développement, nous ferons seulement observer que les coefficients du développement sont des polynômes entiers en k^2 (p. 127).

Si, entre l'équation

$$\frac{d^2 \log \Theta}{dx^2} + k^2 \operatorname{sn}^2 x = \zeta$$

ou

$$\frac{d^2 \log \mathrm{Al}}{dx^2} + k^2 \operatorname{sn}^2 x = 0$$

et

$$\operatorname{sn}'^2 x = (1 - \operatorname{sn}^2 x)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x),$$

on élimine $\operatorname{sn} x$, on aura

$$\left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right)^2 + 4 \frac{d^2 u}{dx^2}\left(1 + \frac{d^2 u}{dx^2}\right)\left(k^2 + \frac{d^2 u}{dx^2}\right) = 0,$$

u désignant $\log \mathrm{Al}(x)$. En faisant $\frac{d^2 u}{dx^2} = \nu$, on a

$$\frac{d\nu}{dx} = 2\nu \sqrt{(1+\nu^2)(1+k^2\nu^2)},$$

et les quatre fonctions $\frac{d^2 \log \mathrm{Al}_i}{dx^2}$ satisfont à cette équation.

XLI. — Équations aux dérivées partielles.

On a

$$\Theta(x) = 1 - 2q \cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4 \cos\frac{2\pi x}{K} - \ldots$$
$$+ (-1)^n 2 q^{n^2} \cos\frac{n\pi x}{K} + \ldots;$$

on en conclut

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = + \frac{2\pi}{K} q \sin\frac{\pi x}{K} - \frac{4\pi}{K} q^4 \sin\frac{2\pi x}{K} + \ldots,$$
$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 2\left(\frac{\pi}{K}\right)^2 q \cos\frac{\pi x}{K} - 2\left(\frac{2\pi}{K}\right)^2 q^4 \cos\frac{2\pi x}{K} + \ldots$$

D'un autre côté, on a

$$q\,\frac{\partial\Theta}{\partial q} = -2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2.4q^4\cos\frac{2\pi x}{K} - \ldots$$
$$-\left(2q\sin\frac{\pi x}{K} - 2q^4 2\sin\frac{2\pi x}{K}\ldots\right)\frac{\pi q x}{K^2}\,\frac{\partial K}{\partial q};$$

il en résulte

$$q\,\frac{\partial\Theta}{\partial q} = -\left(\frac{\pi}{K}\right)^2\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} - \frac{qx}{K}\,\frac{\partial K}{\partial q}\,\frac{\partial\Theta}{\partial x};$$

si l'on remplace Θ par Al, on trouve alors

$$\frac{\partial^2 \mathrm{Al}}{\partial x^2} + 2k^2 z\,\frac{\partial \mathrm{Al}}{\partial x} + 2kk'^2\,\frac{\partial \mathrm{Al}}{\partial k} + k^2 z^2\,\mathrm{Al} = 0.$$

On arrive d'une façon analogue à des équations différentielles pour Al_1, Al_2, Al_3, ne différant de celles-ci que par le dernier terme qui, au lieu d'être $k^2 z^2\,\mathrm{Al}$, est

$$(k'^2 + k^2 x^2)\mathrm{Al}_1,\quad (1 + k^2 x^2)\mathrm{Al}_2,\quad (k^2 + k^2 x^2)\mathrm{Al}_3.$$

CHAPITRE IX.

FONCTIONS MODULAIRES.

I. — Équations différentielles entre les périodes.

Désignons par Δ le radical $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ et posons

$$u = \int \frac{dx}{\Delta}, \qquad v = \int \frac{x^2\,dx}{\Delta},$$

les intégrales étant prises le long d'un contour fermé contenant deux des zéros de Δ, on aura

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dk} = k\displaystyle\int \frac{dx}{\Delta}\,\frac{x^2}{1-k^2x^2}, \\[2ex] \dfrac{dv}{dk} = k\displaystyle\int \frac{dx}{\Delta}\,\frac{x^4}{1-k^2x^2}. \end{cases}$$

De l'équation identique

$$\frac{d}{dx}\,\frac{x(1-x^2)}{\Delta} = \frac{1-x^2}{\Delta} - \frac{k'^2x^2}{(1-k^2x^2)\Delta},$$

en vertu de (1), on tire, en intégrant,

$$(2) \qquad 0 = u - v - \frac{k'^2}{k}\,\frac{du}{dk};$$

d'ailleurs on a, en vertu de (1),

$$(3) \qquad \frac{du}{dk} - k^2\,\frac{dv}{dk} = kv.$$

Ces formules (2) et (3) conduisent aux équations du second ordre

$$(4)\qquad \frac{d}{dk}\left[(k-k^3)\frac{du}{dk}\right]-ku=0,$$

$$(5)\qquad \frac{d}{dk}\left[(k^3-k^5)\frac{dv}{dk}\right]-3k^3v=0.$$

Les équations (4) et (5) sont satisfaites quand on remplace u par une période quelconque de l'intégrale elliptique de première espèce, et v par une période de l'intégrale de seconde espèce. Ainsi, par exemple, A et B désignant deux constantes arbitraires, $AK + BK'$ sera l'intégrale générale de (4).

Reprenons l'équation (3) et écrivons-la ainsi

$$\frac{du}{dk}=\frac{k}{k'^2}(u-v);$$

si l'on pose successivement dans cette formule

$$v=\int_0^1\frac{x^2\,dx}{\Delta}=\int_0^{K}\operatorname{sn}^2x\,dx=\frac{J}{k^2},$$

$$u=K$$

et

$$v=\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{x^2\,dx}{\Delta}=\int_K^{K+K'\sqrt{-1}}\operatorname{sn}^2x\,dx=\frac{J'\sqrt{-1}}{k^2},$$

$$u=\sqrt{-1},$$

on aura

$$\frac{dK}{dk}=\frac{k}{k'^2}\left(K-\frac{J}{k^2}\right),$$

$$\frac{dK'}{dk}=\frac{k}{k'^2}\left(K'-\frac{J'}{k^2}\right)$$

et, en remplaçant J et J' par leurs valeurs (a) et (b) (p. 294),

$$\frac{dK}{dk}=\frac{k}{k'^2}\left(K-\zeta\frac{K}{k^2}\right),$$

$$\frac{dK'}{dk}=\frac{k}{k'^2}\left(K'-\zeta\frac{K'}{k^2}-\frac{\pi}{2Kk^2}\right);$$

l'élimination de ζ entre ces deux formules fournit la relation très importante

(6) $$\frac{K' dK - K dK'}{dk} = \frac{K}{kk'^2},$$

dont nous aurons bientôt l'occasion de nous servir.

II. — Définition et propriétés des fonctions modulaires.

Nous avons trouvé (p. 259) entre les modules et les périodes les relations

(1) $$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{k} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)} = \frac{\eta_1(0)}{\theta_1(0)} &= \frac{2q^{\frac{1}{4}}(1+q^2)^2(1+q^4)^2(1+q^6)^2\dots}{(1+q)^2(1+q^3)^2(1+q^5)^2\dots} \\ &= \frac{(1-p)^2(1-p^3)^2(1-p^5)^2\dots}{(1+p)^2(1+p^3)^2(1+p^5)^2\dots}, \end{aligned} \right.$$

(2) $$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)} = \frac{\theta(0)}{\theta_1(0)} &= \frac{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\dots}{(1+q)^2(1+q^3)^2(1+q^5)^2\dots} \\ &= \frac{2p^{\frac{1}{4}}(1+p^2)^2(1+p^4)^2(1+p^6)^2\dots}{(1+p)^2(1+p^3)^2(1+p^5)^2\dots}. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs, si l'on fait $\frac{K'}{K} = \rho$ et si l'on pose

(3) $$\left\{ \begin{aligned} \varphi(\rho) &= \frac{\sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}}(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\dots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots} \\ &= \frac{(1-p)(1-p^3)(1-p^5)\dots}{(1+p)(1+p^3)(1+p^5)\dots}, \end{aligned} \right.$$

(4) $$\left\{ \begin{aligned} \psi(\rho) &= \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots} \\ &= \frac{\sqrt{2}\,p^{\frac{1}{8}}(1+p^2)(1+p^4)(1+p^6)\dots}{(1+p)(1+p^3)(1+p^5)\dots}, \end{aligned} \right.$$

on aura

$$k^2 = \varphi^8(\rho) \qquad \text{et} \qquad k'^2 = \psi^8(\rho);$$

il ne faut pas d'ailleurs oublier que

(5) $$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}} = e^{-\pi\rho}, \qquad p = e^{-\pi\frac{K}{K'}} = e^{-\frac{\pi}{\rho}}$$

Les fonctions φ et ψ sont ce que l'on appelle les *fonctions modulaires*. Elles ont été étudiées par M. Hermite (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 1858). Liouville s'était occupé, dès 1840, des fonctions K et K′ considérées comme fonctions de k^2 (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 1840; reproduit dans son Journal, même année); il a prouvé que ces fonctions ne sauraient être réductibles aux fonctions algébriques.

Première propriété. — *Les fonctions modulaires sont monodromes et monogènes dans toute l'étendue du demi-plan situé à droite de l'axe des y; elles ne sont pas définies pour les valeurs de ρ situées à gauche de cet axe; le point à l'infini est un point essentiel.*

C'est ce qui résulte de leur définition même par les équations (3) et (4).

Deuxième propriété. — Si l'on écrit les formules (3) et (4) en mettant à la place de p et q leurs valeurs (5), on voit que l'on a

$$\varphi(\rho) = \psi\left(\frac{1}{\rho}\right), \qquad \psi(\rho) = \varphi\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Troisième propriété. — On a évidemment aussi

$$\varphi(\rho + \sqrt{-1}) = e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{8}} \frac{\varphi(\rho)}{\psi(\rho)}$$

et, par conséquent,

$$\varphi(\rho + 2\sqrt{-1}) = e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}} \varphi(\rho);$$

il en résulte que $\varphi(\rho)$ *se reproduit au facteur* $e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}$ *près, quand on change* ρ *en* $\rho + 2\sqrt{-1}$: *donc* $\varphi^8(\rho)$ *a pour période* $2\sqrt{-1}$.

Quatrième propriété. — On a

$$\psi(\rho + \sqrt{-1}) = \frac{1}{\psi(\rho)}, \qquad \psi(\rho + \sqrt{-1}) = \psi(\rho);$$

donc $\psi(\rho)$ a pour période $2\sqrt{-1}$.

Cinquième propriété. — Quand on remplace dans le calcul de k les périodes $4K$ et $2K'\sqrt{-1}$ par d'autres périodes elliptiques, k conserve la même valeur; donc, quand on pose

$$\rho_1 = \frac{2n + (2n'+1)\rho\sqrt{-1}}{2m+1+2m'\rho\sqrt{-1}},$$

on a

$$\varphi^8(\rho_1) = \varphi^8(\rho), \qquad \psi^8(\rho_1) = \psi^8(\rho).$$

III. — Fonctions modulaires inverses.

Nous poserons

$$\varphi^8(\rho) = x,$$

et nous en déduirons

$$\rho = \varpi(x).$$

Voici maintenant quelles vont être les propriétés de cette fonction $\varpi(x)$. Cette fonction est égale à $\frac{K'}{K}$, K' et K étant donnés par les formules

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-z^2k^2)}},$$

$$K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-z^2+z^2k^2)}},$$

où $k^2 = x$.

K et K' sont des fonctions synectiques de $k^2 = x$ quand le point x n'est pas contenu dans un contour fermé renfermant l'un des points 0, 1. Il en est de même de $\frac{K'}{K} = \varpi(x)$.

Examinons ce qui se passe autour du point 0. On peut développer K en série ordonnée suivant les puissances de k^2, et l'on a

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\left(1 + \frac{1}{2}z^2k^2 + \frac{1.3}{2.4}z^4k^4 + \ldots\right),$$

$$K = \pi\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \ldots\right];$$

mais l'équation (6) du § I, à savoir

$$(A) \qquad \frac{K'\,dK - K\,dK'}{dk} = \frac{\pi}{kk'^2},$$

divisée par la précédente élevée au carré, donne

$$-\frac{d\frac{K'}{K}}{dk} \quad \text{ou} \quad -\frac{d\rho}{dk} = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{k(1-k^2)}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\ldots\right]^{-2}.$$

Il en résulte que $\frac{d\rho}{dk}$ est développable sous la forme

$$-\frac{d\rho}{dk} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k} + Ak + Bk^3 + \ldots\right)$$

et que l'on a

$$-\rho + \rho_0 = \frac{1}{\pi}\left(\log\frac{k}{k_0} + A\,\frac{k^2}{2} + B\,\frac{k^4}{4} + \ldots - A\,\frac{k_0^2}{2} - B\,\frac{k_0^4}{4} - \ldots\right),$$

k_0, ρ_0, A, B, ... désignant des constantes. On voit que

$$-\varpi(x) + \varpi(x_0) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{x}{x_0} + A\,\frac{x - x_0}{2} + \ldots$$

et, par conséquent, $\varpi(x)$ prend autour du point o une infinité de valeurs qui se permutent les unes dans les autres comme les valeurs de $-\frac{1}{2\pi}\log\frac{x}{x_0}$.

Pour voir comment se comporte la fonction $\varpi(x)$ dans le voisinage du point $x = 1$, on développera K′ suivant les puissances de k', et l'on aura

$$K' = \pi\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k'^2 + \ldots\right]$$

et, en faisant usage de la formule (A) déjà employée tout à l'heure, on trouve

$$\frac{d\frac{K}{K'}}{dk} = \frac{1}{\pi kk'^2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k'^2 + \ldots\right]$$

ou

$$-\frac{d\frac{K}{K'}}{dk'} = \frac{1}{\pi k^2 k'}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k'^2 + \ldots\right]$$

et, en intégrant,

$$-\varpi(x)-\varpi(x_0)=\frac{1}{\pi}\log\frac{k'}{k_0}+A\,\frac{k'^2-k_0'^2}{2}+\dots$$

ou

$$-\varpi(x)-\varpi(x_0)=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1-x}{1-x_0}+\dots,$$

et $\varpi(x)$ se comporte dans le voisinage du point 1 comme la fonction $-\frac{1}{2\pi}\log\frac{1-x}{1-x_0}$.

En dehors de ces points 0, 1, ∞, qui sont les seuls points critiques de $\varpi(x)$, cette fonction n'est jamais nulle ni infinie; il faudrait en effet, pour qu'il en fût ainsi, que l'on eût K ou $K'=0$, car ni K ni K′ ne sont jamais infinis, mais

$$\operatorname{sn}(x+2K)=-\operatorname{sn}x,$$

quel que soit x : donc K ne saurait être nul; pour une raison analogue, K′ ne peut pas s'annuler : donc $\varpi(x)=\frac{K'}{K}$ ne peut s'annuler non plus. C. Q. F. D.

IV. — Théorème de M. Picard.

Théorème I. — *Soit* $G(x)$ *une fonction synectique dans toute l'étendue du plan, mais possédant un point essentiel à l'infini; si* a *et* b *sont des nombres tels qu'il n'existe pas de valeur finie de* x, *telle que l'on ait* $G(x)=a$, $G(x)=b$, *la fonction* $G(x)$ *se réduira à une constante.*

On peut, sans nuire à la généralité, supposer $a=0$, $b=1$; car, si $f(x)$ est une fonction qui ne passe ni par la valeur a ni par la valeur b, il existera une fonction $G(x)=\frac{f(x)-a}{b-a}$ qui ne passera ni par la valeur 0 ni par la valeur 1 pour des valeurs finies de x. Nous sommes donc ramenés à démontrer que, si une fonction $G(x)$ ne passe ni par la valeur 0 ni par la valeur 1, elle est constante.

A cet effet, considérons la fonction $\varpi[G(x)]$, $\varpi(z)$ dési-

gnant la fonction modulaire inverse étudiée au paragraphe précédent. Cette fonction $\varpi[G(x)]$ est monodrome ; en effet, $G(x)$ ne devient jamais égale à 0 ou 1. Alors, quand le point x décrit un contour fermé C, le point $\varpi[G(x)]$ décrit un contour correspondant C′ ; si l'on suppose que le contour C se déforme et devienne infiniment petit, le contour C′ se déforme aussi sans jamais franchir les points 0, 1 et devient lui-même infiniment petit. Les valeurs initiale et finale de $G(x)$ et de $\varpi[G(x)]$ sont restées les mêmes, et comme, en dernier lieu, elles sont infiniment peu différentes, il faut qu'elles soient restées les mêmes : le contour C′ est donc fermé, et la fonction $\varpi[G(x)]$ est monodrome dans toute l'étendue du plan. Mais la fonction $e^{-\varpi[G(x)]}$ est synectique dans toute l'étendue du plan ; comme $\varpi[G(x)]$, elle a un module toujours inférieur à un, puisque la fonction ϖ a sa partie réelle positive ; donc $e^{-\varpi[G(x)]}$, ayant un module toujours inférieur à une quantité finie, est une constante ; donc $\varpi[G(x)]$ est une constante, donc enfin $G(x)$ se réduit aussi à une constante.

C. Q. F. D.

Théorème II. — *Soit $f(x)$ une fonction qui n'a d'autres points singuliers à distance finie que des pôles et qui est d'ailleurs toujours monodrome et monogène : il ne peut y avoir plus de deux valeurs finies a et b que $f(x)$ ne puisse prendre pour des valeurs finies de x.*

Si la fonction f n'a que des pôles, elle peut se mettre sous la forme $f(x) = \frac{G_1(x)}{G_2(x)}$, G_1 et G_2 désignant des fonctions synectiques dans toute l'étendue du plan (t. III, p. 371) ; or, $f(x)$ ne passant ni par la valeur a ni par la valeur b, on n'aura jamais

$$G_1 - a G_2 = 0, \qquad G_1 - b G_2 = 0 :$$

donc on peut poser

$$G_1 - a G_2 = e^P, \qquad G_1 - b G_2 = e^Q,$$

P et Q désignant des fonctions synectiques dans toute l'étendue du plan; par suite,

$$G_1 = \frac{be^P - ae^Q}{b-a}, \qquad G_2 = \frac{e^P - e^Q}{b-a}$$

et

$$f(x) = \frac{be^P - ae^Q}{e^P - e^Q}.$$

Je dis maintenant que l'on peut satisfaire à l'équation

$$\frac{be^P - ae^Q}{e^P - e^Q} = c \qquad \text{ou} \qquad e^{P-Q} = \frac{a-c}{b-c},$$

c'est-à-dire que l'on peut prendre $f(x)$ égal à c. Comme a, b, c sont des nombres différents, $\frac{a-c}{b-c}$ n'est ni nul ni infini; en le désignant par A, l'équation précédente donne

$$P - Q = \log A + 2m\pi\sqrt{-1}.$$

Or la fonction P — Q n'a qu'un point critique au plus et à l'infini, il n'y a qu'une valeur qu'elle ne puisse prendre; elle pourra donc prendre l'une des valeurs de $\log A + 2m\pi\sqrt{-1}$ à moins d'être constante, mais alors la fonction $f(x)$ elle-même serait une constante; donc, etc. C. Q. F. D.

Ces deux théorèmes ont été démontrés par M. Picard (*Annales de l'École Normale*, 2e série, t. IX; 1880) qui leur a donné une certaine extension. Il serait bien à désirer que l'on affranchît leur démonstration de la considération des fonctions elliptiques.

V. — Sur le problème de la transformation.

Le problème de la transformation, tel que l'a posé Jacobi dans les *Fundamenta nova*, semble surtout avoir pour but la simplification des intégrales elliptiques et leur réduction aux types définitifs, canoniques, si je puis m'exprimer ainsi; mais le problème de la transformation conduit à l'étude des

fonctions elliptiques, considérées comme fonctions du module.

Nous restreindrons le problème de la transformation au cas particulier que voici :

Étant donnée l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{dy}{g_1\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}},$$

trouver dans quels cas y peut être fonction algébrique de x et, quand y est fonction algébrique de x, déterminer cette fonction.

C'est Abel qui a posé la question en ces termes et qui a donné en même temps les moyens de la résoudre; Jacobi supposait seulement, comme on se le rappelle, y fonction rationnelle de x. Si nous désignons, pour abréger, par $\Delta(x, k)$ le radical $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$, l'équation (1) donnera, en appelant α une constante et en égalant chacun de ses deux membres à dz,

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\Delta(x, k)} = \int_0^y \frac{dy}{g_1\Delta(y, k_1)} - \frac{\alpha}{g_1},$$

d'où l'on tire

$$x = \operatorname{sn}(z, k), \qquad y = \operatorname{sn}(g_1 z + \alpha, k_1).$$

Le problème de la transformation, tel qu'il a été posé par Abel, peut donc s'énoncer ainsi :

Étant donné un module k, déterminer un nouveau module k_1, tel que $\operatorname{sn}(g_1 z + \alpha, k_1)$ soit lié à $\operatorname{sn}(z, k)$ au moyen d'une équation algébrique.

Nous nous occuperons seulement du cas où $\operatorname{sn}(g_1 z + \alpha, k_1)$ peut s'exprimer rationnellement en fonction de $\operatorname{sn}(z, k)$ ou $\operatorname{sn} z$, auquel nous adjoindrons $\operatorname{cn} z$ et $\operatorname{dn} z$.

Ainsi, en définitive, le problème de la transformation pour nous va consister à :

Calculer $\operatorname{sn}(g_1 z, k_1)$, $\operatorname{cn}(g_1 z, k_1)$, $\operatorname{dn}(g_1 z, k_1)$, *en fonc-*

tion rationnelle de $\mathrm{sn}(z, k)$, $\mathrm{cn}(z, k)$, $\mathrm{dn}(z, k)$, *toutes les fois que ce sera possible, et à déterminer les cas dans lesquels la solution est possible.*

VI. — Réduction du problème.

Désignons par $4K$ et $4K'\sqrt{-1}$ un système de périodes elliptiques (p. 262) commun aux trois fonctions $\mathrm{sn}(x, k)$, $\mathrm{cn}(x, k)$, $\mathrm{dn}(x, k)$, et par $4K_1$, $4K'_1\sqrt{-1}$ un système de périodes elliptiques commun aux trois fonctions $\mathrm{sn}(g_1 x, k_1)$, $\mathrm{cn}(g_1 x, k_1)$, $\mathrm{dn}(g_1 x, k_1)$. Les dernières fonctions devant s'exprimer rationnellement au moyen des premières, il faudra que l'on ait, a, b, a', b' désignant des entiers,

$$K = aK_1 + bK'_1\sqrt{-1},$$
$$K'\sqrt{-1} = a'K_1 + b'K'_1\sqrt{-1},$$

et, si l'on suppose les parties réelles des rapports $\frac{K'}{K}$, $\frac{K'_1}{K_1}$ positives,

$$ab' - ba' = \delta$$

sera positif.

Pour résoudre le problème de la transformation, nous le décomposerons en d'autres plus simples.

Soient D le plus grand commun diviseur de a et b, et $\frac{a}{D} = \alpha$, $\frac{b}{D} = \beta$; soient α' et β' deux entiers satisfaisant à

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1.$$

Posons

$$K_2 = \alpha K_1 + \beta K'_1\sqrt{-1},$$
$$K'_2\sqrt{-1} = \alpha' K_1 + \beta' K'_1\sqrt{-1};$$

on en déduira

$$K_1 = \beta' K_2 - \beta K'_2\sqrt{-1},$$
$$K'_1\sqrt{-1} = -\alpha' K_2 + \alpha K'_2\sqrt{-1}$$

et, par conséquent,

$$K = DK_2,$$

$$K'\sqrt{-1} = (a'\beta' - b'\alpha')K_2 + (\alpha b' - \beta a')K'_2\sqrt{-1}.$$

Il résulte de là que l'on pourra effectuer la transformation en plusieurs fois et passer successivement des fonctions aux périodes $4K_1$, $4K'_1\sqrt{-1}$ aux fonctions ayant pour périodes $4K_2$, $4K'_2\sqrt{-1}$, ..., aux fonctions ayant pour périodes $4K$, $4K'\sqrt{-1}$, ces périodes étant liées les unes aux autres par les relations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} K_2 &= \alpha K_1 + \beta K_1\sqrt{-1}, \\ K'_2\sqrt{-1} &= \alpha' K_1 + \beta' K_1\sqrt{-1}, \end{aligned}\right. \qquad \alpha\beta' - \beta\alpha' = 1,$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} K_3 &= K_2, \\ K'_3\sqrt{-1} &= K'_2\sqrt{-1}(\alpha b' - \beta a'), \end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} K_4 &= K_3, \\ K'_4\sqrt{-1} &= (a'\beta' - b'\alpha')K_3 + K'_3\sqrt{-1}, \end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} K &= DK_2, \\ K'\sqrt{-1} &= K'_4\sqrt{-1}. \end{aligned}\right.$$

Les modules des substitutions (1) et (3) sont égaux à un ; quant aux substitutions (2) et (4), elles s'effectuent en conservant une période et en divisant l'autre par un entier ; nous voilà donc ramenés à étudier deux espèces de transformations : 1° celles pour lesquelles la substitution entre les périodes est unimodulaire ; 2° celles dans lesquelles on divise l'une des périodes par un nombre entier, et même par un entier premier ; car celles-là peuvent s'effectuer au moyen de plusieurs autres dans lesquelles on divise successivement la même période par des nombres premiers.

VII. — Transformations fournies par des substitutions unimodulaires entre les périodes.

Les transformations que nous allons étudier correspondent à des relations de la forme

$$K = \alpha K_1 + \beta K'_1\sqrt{-1},$$
$$K'\sqrt{-1} = \alpha' K_1 + \beta' K_1\sqrt{-1},$$

entre les périodes, avec la relation

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1.$$

Nous les partagerons en six classes, d'après les restes de la division de α, β, α', β' par 2 compatibles avec la condition $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1$, qui exige que, si l'un des nombres α, β' est divisible par 2, aucun des nombres β, α' ne le soit et *vice versa* :

1re classe..........	$\alpha \equiv 1$,	$\beta \equiv 0$,	$\alpha' \equiv 0$,	$\beta' \equiv 1$;
2e »	$\alpha \equiv 1$,	$\beta \equiv 0$,	$\alpha' \equiv 1$,	$\beta' \equiv 1$;
3e »	$\alpha \equiv 1$,	$\beta \equiv 1$,	$\alpha' \equiv 0$,	$\beta' \equiv 1$;
4e »	$\alpha \equiv 1$,	$\beta \equiv 1$,	$\alpha' \equiv 1$,	$\beta' \equiv 0$;
5e »	$\alpha \equiv 0$,	$\beta \equiv 1$,	$\alpha' \equiv 1$,	$\beta' \equiv 1$;
6e »	$\alpha \equiv 0$,	$\beta \equiv 1$,	$\alpha' \equiv 1$,	$\beta' \equiv 0$;

le signe $\equiv$ représentant une égalité dans laquelle on a négligé les multiples de 2.

Or je dis que toutes ces transformations se ramènent à la première classe; si, en effet, après avoir effectué une transformation de première classe

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} K_2 &= \alpha K_1 + \beta K'_1 \sqrt{-1}, \\ K'_2 \sqrt{-1} &= \alpha' K_1 + \beta' K'_1 \sqrt{-1}, \end{aligned} \right.$$

on effectue la nouvelle transformation

$$\begin{aligned} K &= K_2, \\ K \sqrt{-1} &= K'_2 \sqrt{-1} + K_2, \end{aligned}$$

on aura

$$(A) \qquad \left\{ \begin{aligned} K &= \alpha K_1 + \beta K'_1 \sqrt{-1}, \\ K' \sqrt{-1} &= (\alpha + \alpha') K_1 + (\beta + \beta') K'_1 \sqrt{-1}; \end{aligned} \right.$$

les nouvelles valeurs des coefficients sont, en négligeant les multiples de 2,

$$1, \quad 0, \quad 1, \quad 1;$$

la transformation (A) est donc de seconde classe. On verra

de même que, si l'on effectue une transformation de première classe, puis la transformation

$$K = K_2 + K'_2\sqrt{-1},$$
$$K'\sqrt{-1} = K'_2\sqrt{-1},$$

on obtiendra une transformation de troisième classe.

Après avoir effectué une transformation de première, de seconde ou de troisième classe, il suffit de faire

$$K = K'_1\sqrt{-1},$$
$$K'\sqrt{-1} = -K,$$

pour obtenir respectivement une transformation de sixième, de quatrième ou de cinquième classe.

Ainsi toutes les transformations possibles se ramènent :

1° A des transformations de la forme

$$K = (2m+1)K_1 + 2n\,K'_1\sqrt{-1},$$
$$K'\sqrt{-1} = 2m'K_1 + (2n'+1)K'_1\sqrt{-1},$$

$m+n$ étant divisible par 4, afin que l'on ait

$$(2m+1)(2n'+1) - 4nm' = 1$$

et que les rapports $\frac{K'}{K}$ et $\frac{K'_1}{K_1}$ soient positifs ;

2° A des transformations de la forme

$$K = K_1 + K'_1\sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad = K_1,$$
$$K'\sqrt{-1} = K'_1\sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad = K_1 + K'_1\sqrt{-1};$$

3° A des transformations de la forme

$$K = K'_1\sqrt{-1},$$
$$K'\sqrt{-1} = K_1;$$

4° A des transformations dans lesquelles on multiplie une seule période par un nombre premier.

VIII. — Méthode générale pour effectuer les transformations précédentes.

Considérons une transformation quelconque représentée par la substitution unimodulaire

$$K = \alpha K_1 + \beta K'_1 \sqrt{-1},$$
$$K' \sqrt{-1} = \alpha' K_1 + \beta' K'_1 \sqrt{-1},$$

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1.$$

Appelons Θ', H', Θ'_1, H'_1 ce que deviennent les fonctions Θ, H, Θ_1, H_1 quand on remplace les périodes $4K$ et $4K'\sqrt{-1}$ par $4K_1$ et $4K'_1\sqrt{-1}$; les premières fonctions ont les mêmes zéros que les secondes. Ainsi Θ' a les mêmes zéros que l'une des fonctions Θ, H, Θ_1, H_1 : donc ces fonctions, à l'ordre près, sont égales deux à deux, à un facteur exponentiel près de la forme (p. 233)

$$e^{Ax^2+Bx+C},$$

A, B, C désignant des constantes. Supposons, par exemple,

$$\Theta'_1(x) = H(x)e^{Ax^2+Bx+C};$$

les fonctions Θ'_1 et H sont paires ou impaires : donc elles doivent être toutes deux de même parité et B doit être nul. Ainsi

$$\text{(A)} \qquad \Theta'_1(x) = H(x)e^{Ax^2+C};$$

donc, en augmentant x de la période $4K$,

$$\Theta'_1(x + 4\alpha K_1 + 4\beta K'_1\sqrt{-1}) = H(x)e^{A(x+4K)^2+C};$$

mais

$$\Theta'_1(x + 4\alpha K_1 + 4\beta K'_1\sqrt{-1}) = \Theta'_1(x + 4\beta K'\sqrt{-1})$$
$$= \Theta'_1(x)e^{-\frac{2\beta\pi\sqrt{-1}}{K_1}(x+K'_1\sqrt{-1})};$$

donc l'équation précédente devient

$$\Theta_1'(x)e^{-\frac{2\beta\pi\sqrt{-1}}{K_1}(x+K_1'\sqrt{-1})} = H(x)e^{A(x+4K)^2+C}$$

et, en tenant compte de (A),

$$e^{-\frac{2\beta\pi\sqrt{-1}}{K_1}(x+K_1'\sqrt{-1})} = e^{8AKx+16AK^2+C}.$$

On a donc

$$\frac{-2\beta\pi\sqrt{-1}}{K_1}(x+K_1'\sqrt{-1}) = 8AKx+16AK^2+C+2\lambda\pi\sqrt{-1},$$

λ désignant un entier; on en déduit

$$-\frac{2\beta\pi\sqrt{-1}}{K_1} = 8AK$$

ou

$$A = -\frac{\beta\pi\sqrt{-1}}{4KK_1}.$$

Quant à la constante C, on la déterminera en faisant $x=0$; au nombre $2\lambda\pi\sqrt{-1}$ près, elle est la même pour les quatre formules analogues à (A), et, comme ce nombre $2\lambda\pi\sqrt{-1}$ peut être négligé, on peut la regarder comme étant la même pour les quatre formules en question.

S'il s'agit d'une transformation de première classe, Θ', H', Θ_1', H_1' sont proportionnels à Θ, H, Θ_1, H_1, car ils ont, en vertu des formules

$$K = (2m+1)K_1 + 2nK_1'\sqrt{-1},$$
$$K'\sqrt{-1} = 2m'K_1 + (2n'+1)K_1'\sqrt{-1},$$

les mêmes zéros respectivement; on a donc

$$\sqrt{k_1}\,\mathrm{sn}(g_1x, k_1) = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}(x, k),$$
$$\sqrt{\frac{k_1}{k_1'}}\,\mathrm{cn}(g_1x, k_1) = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\mathrm{cn}(x, k).$$

Si l'on fait $x = 0$ dans ces deux formules après avoir divisé la première par x, on trouve

$$\sqrt{k_1}\, g_1 = \sqrt{k}, \qquad \sqrt{\frac{k_1}{k'_1}} = \sqrt{\frac{k}{k'}}:$$

donc $k^2 = k_1^2$, $g_1 = 1$; alors la transformation ne présente rien d'intéressant.

S'il s'agit d'une transformation dans laquelle on conserve une période, une méthode analogue montre que $g_1 = \pm k$ et $k^2 k_1^2 = 1$, et que l'on a

$$\operatorname{sn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = k \operatorname{sn} u,$$

$$\operatorname{cn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \operatorname{dn} u,$$

$$\operatorname{dn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \operatorname{cn} u;$$

s'il s'agit d'une transformation dans laquelle on permute les périodes, si l'on pose, par exemple,

$$K = K'_1 \sqrt{-1}, \qquad K' \sqrt{-1} = -K_1,$$

on trouve

$$k_1^2 = k'^2, \qquad g_1 = \pm\sqrt{-1},$$

$$\operatorname{sn}(x\sqrt{-1}, k') = \sqrt{-1}\,\frac{\operatorname{sn}(x, k)}{\operatorname{cn}(x, k)},$$

$$\operatorname{cn}(x\sqrt{-1}, k') = \frac{1}{\operatorname{cn}(x, k)},$$

$$\operatorname{dn}(x\sqrt{-1}, k') = \frac{\operatorname{dn}(x, k)}{\operatorname{cn}(x, k)}.$$

IX. — Division d'une période par deux.

Le problème de la division des périodes pourrait être résolu par le théorème de Liouville, puisque, tel que nous l'avons présenté, il permet de calculer, par exemple, un sinus amplitude en fonction d'un autre qui a une période m fois plus grande, c'est-à-dire, en définitive, ayant avec lui une période

commune. Mais on donne ordinairement une autre solution de la question.

Proposons-nous tout d'abord de calculer les fonctions elliptiques relatives aux quantités $\frac{K}{2}$ et K' en fonction de celles qui sont relatives aux quantités K et K'. Soient $\Theta^{(1)}$, $H^{(1)}$, $\Theta_1^{(1)}$, $H_1^{(1)}$ ce que deviennent les fonctions auxiliaires Θ, H, Θ_1, H_1 quand on y remplace K par $\frac{K}{2}$; soient $\operatorname{sn}_1 gx$, $\operatorname{cn}_1 gx$, $\operatorname{dn}_1 gx$ ce que deviennent par ce même changement $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$; soient enfin k_1 et k'_1 les nouveaux modules.

Les fonctions $\Theta^{(1)}$, $\Theta\Theta_1$ et HH_1 satisfont toutes les trois aux équations

$$\theta(x+2K)=\theta(x),$$
$$\theta(x+2K'\sqrt{-1})=e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})}\theta(x);$$

l'une d'elles est alors une fonction linéaire des deux autres, et l'on a

$$\Theta^{(1)}(x)=A\Theta(x)\Theta_1(x)+BH(x)H_1(x).$$

On déterminera la constante B en faisant $x=K'\sqrt{-1}$; $\Theta(x)$ et $\Theta^{(1)}(x)$ s'annulant, on a $B=0$ et, par suite, la formule précédente se réduit à

$$\Theta^{(1)}(x)=A\Theta(x)\Theta_1(x);$$

en changeant x en $x+\frac{K}{2}$ ou en $x+K'\sqrt{-1}$ ou en

$$x+\frac{K}{2}+K'\sqrt{-1},$$

on obtient le groupe

$$\Theta^{(1)}(x)=A\Theta(x)\Theta_1(x),$$
$$\Theta_1^{(1)}(x)=A\Theta\left(x+\frac{K}{2}\right)\Theta\left(x-\frac{K}{2}\right),$$
$$H^{(1)}(x)=AH(x)H_1(x),$$
$$H_1^{(1)}(x)=AH\left(x+\frac{K}{2}\right)H_1\left(x-\frac{K}{2}\right);$$

si l'on se reporte alors aux formules d'addition (p. 269), on peut écrire

$$\Theta^{(1)}(x) = A\,\Theta(x)\Theta_1(x),$$

$$\Theta_1^{(1)}(x) = A\,\frac{\Theta^2\left(\frac{K}{2}\right)\Theta^2(x) - H^2\left(\frac{K}{2}\right)H^2(x)}{\Theta^2(0)},$$

$$H^{(1)}(x) = A\,H(x)H_1(x),$$

$$H_1^{(1)}(x) = A\,\frac{\Theta^2\left(\frac{K}{2}\right)H^2(x) - H^2\left(\frac{K}{2}\right)\Theta^2(x)}{\Theta^2(0)}.$$

La constante A se déterminerait, par exemple, en faisant $x = 0$ dans la première formule. On tire de ces formules, par division,

$$\sqrt{k_1}\,\mathrm{sn}_1 g x = k\,\frac{\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x}{\mathrm{dn}\,x},$$

$$\sqrt{\frac{k_1}{k_1'}}\,\mathrm{cn}_1 g x = k\sqrt{k'}\,\frac{\Theta^2\left(\frac{K}{2}\right)}{\Theta^2(0)}\,\frac{\mathrm{sn}^2 x}{\mathrm{dn}\,x} - \sqrt{k'}\,\frac{H^2\left(\frac{K}{2}\right)}{\Theta^2(0)}\,\frac{1}{\mathrm{dn}\,x},$$

$$\frac{1}{\sqrt{k_1'}}\,\mathrm{dn}_1 g x = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta^2\left(\frac{K}{2}\right)}{\Theta^2(0)}\,\frac{1}{\mathrm{dn}\,x} - k\sqrt{k'}\,\frac{H^2\left(\frac{K}{2}\right)}{\Theta^2(0)}\,\frac{\mathrm{sn}^2 x}{\mathrm{dn}\,x}.$$

Les constantes $\Theta\left(\frac{K}{2}\right)$ et $H\left(\frac{K}{2}\right)$ s'obtiennent en faisant $x = a = \frac{K}{2}$ dans les formules d'addition qui donnent

$$\Theta(x+a)\Theta(x-a)$$

et

$$\Theta(x-a)H(x+a).$$

Si l'on divise par x la première formule et si l'on fait $x = 0$, on a

$$\sqrt{k_1}\,g = k,$$

$$\sqrt{\frac{k_1}{k_1'}} = -\sqrt{k'}\,\frac{H^2\left(\frac{K}{2}\right)}{\Theta^2(0)},$$

$$\frac{1}{\sqrt{k_1'}} = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta^2\left(\frac{K}{2}\right)}{\Theta^2(0)},$$

et le problème de la transformation est encore résolu dans ce

cas. Il reste à calculer $\frac{H^2\left(\frac{K}{2}\right)}{\Theta^2(0)}$ et $\frac{\Theta^2\left(\frac{K}{2}\right)}{\Theta^2(0)}$. Appelons ces quantités x et y, en faisant $x = a = \frac{K}{2}$ dans la formule (p. 269) qui donne $\Theta(x-a)\Theta(x+a)$; on trouve

$$\frac{\Theta(K)}{\Theta(0)} = y^2 - x^2 = \frac{1}{\sqrt{k}};$$

la formule (2) (p. 256) donne ensuite

$$1 = \frac{x}{y}\left(\frac{1}{k} + \frac{k'}{k}\right) = \frac{x}{y}\,\frac{1+k'}{k},$$

d'où l'on tire x et y en fonction de k et k' si l'on y tient.

La division de l'autre période par 2 s'effectue d'une façon analogue : appelons $\Theta^{(1)}$, $H^{(1)}$, $\Theta_1^{(1)}$, $H_1^{(1)}$ ce que deviennent les fonctions auxiliaires quand on remplace K' par $\frac{K'}{2}$. Les fonctions

$$\Theta^{(1)}(x),\quad \Theta\left(x + \frac{K'\sqrt{-1}}{2}\right)\Theta\left(x - \frac{K'\sqrt{-1}}{2}\right)$$

et

$$\Theta_1\left(x + \frac{K'\sqrt{-1}}{2}\right)\Theta_1\left(x - \frac{K'\sqrt{-1}}{2}\right)$$

satisfont aux équations

$$\theta(x+2K) = \theta(x),$$

$$\theta(x+2K'\sqrt{-1}) = e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(2x+2K'\sqrt{-1})};$$

on a donc

$$\Theta^{(1)}(x) = +A\Theta\left(x + \frac{K'\sqrt{-1}}{2}\right)\Theta\left(x - \frac{K'\sqrt{-1}}{2}\right)$$
$$+ B\Theta_1\left(x + \frac{K'\sqrt{-1}}{2}\right)\Theta_1\left(x - \frac{K'\sqrt{-1}}{2}\right),$$

A et B désignant deux constantes. Si l'on fait $x = \frac{K'\sqrt{-1}}{2}$, $\Theta^{(1)}(x)$ s'annule ainsi que le coefficient de A, donc $B = 0$, donc

$$\Theta^{(1)}(x) = A\Theta\left(x + \frac{K'\sqrt{-1}}{2}\right)\Theta\left(x - \frac{K'\sqrt{-1}}{2}\right).$$

Changeant x en $x+\mathrm{K}$, $x+\frac{\mathrm{K}'\sqrt{-1}}{2}$, $x+\mathrm{K}+\frac{\mathrm{K}'\sqrt{-1}}{2}$, on a trois autres formules qui, traitées comme tout à l'heure ont été traitées les formules analogues, fourniront la solution du problème de la transformation pour le cas qui nous occupe.

X. — Division d'une période par un nombre impair.

Supposons $\mathrm{K}_1 = \frac{\mathrm{K}}{n}$, n désignant un nombre impair, et $\mathrm{K}'_1 = \mathrm{K}'$; désignons toujours par $\Theta^{(1)}$, $\mathrm{H}^{(1)}$, $\Theta_1^{(1)}$, $\mathrm{H}_1^{(1)}$ ce que deviennent Θ, H, Θ_1, H_1 quand on y remplace K par $\mathrm{K}_1 = \frac{\mathrm{K}}{n}$. Si l'on considère les fonctions

$$\Theta^{(1)}(x) \quad \text{et} \quad \prod_{m=-\frac{n-1}{2}}^{m=\frac{n-1}{2}} \Theta\left(x+\frac{m}{n}2\mathrm{K}\right),$$

ces deux fonctions satisfont aux relations

$$\theta(x+\mathrm{K}) = \theta(x),$$
$$\theta\left(x+2\mathrm{K}'\sqrt{-1}\right) = -e^{-\frac{n\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})}\,\theta(x);$$

leur rapport est donc doublement périodique. En outre, les deux fonctions en question ont les mêmes zéros : leur rapport est donc fini et, par suite, se réduit à une constante A; on peut donc écrire

$$\Theta^{(1)}(x) = \mathrm{A}\prod\Theta\left(x+\frac{m}{n}2\mathrm{K}\right),$$
$$\Theta_1^{(1)}(x) = \mathrm{A}\prod\Theta_1\left(x+\frac{m}{n}2\mathrm{K}\right),$$
$$\mathrm{H}^{(1)}(x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{A}\prod\mathrm{H}\left(x+\frac{m}{n}2\mathrm{K}\right),$$
$$\mathrm{H}_1^{(1)}(x) = \mathrm{A}\prod\mathrm{H}_1\left(x+\frac{m}{n}2\mathrm{K}\right).$$

Si, dans ces formules, on réunit les facteurs correspondant à des valeurs de m égales et de signes contraires, on a, en faisant usage des formules (p. 269),

$$\Theta^{(1)}(x) = \frac{A\,\Theta(x)}{\Theta^{n-1}(0)} \prod \left[\Theta^2\left(\frac{m}{n}2K\right)\Theta^2(x) - H^2\left(\frac{m}{n}2K\right)H^2(x)\right],$$

$$\Theta_1^{(1)}(x) = \frac{A\,\Theta_1(x)}{\Theta^{n-1}(x)} \prod \left[\Theta_1^2\left(\frac{m}{n}2K\right)\Theta^2(x) - H_1^2\left(\frac{m}{n}2K\right)H^2(x)\right],$$

$$H^{(1)}(x) = \frac{A\,H(x)}{\Theta^{n-1}(x)} \prod \left[H^2\left(\frac{m}{n}2K\right)\Theta^2(x) - \Theta^2\left(\frac{m}{n}2K\right)H^2(x)\right],$$

$$H_1^{(1)}(x) = \frac{A\,H_1(x)}{\Theta^{n-1}(0)} \prod \left[H_1^2\left(\frac{m}{n}2K\right)\Theta^2(x) - \Theta_1^2\left(\frac{m}{n}2K\right)H^2(x)\right],$$

et A se calcule en faisant $x = 0$.

Les produits ont cette fois pour limites 1 et $\frac{n-1}{2}$. Par division, on obtient $\operatorname{sn}_1 gx$, $\operatorname{cn}_1 gx$, $\operatorname{dn}_1 gx$ en fonction de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$:

$$\sqrt{k_1}\,\operatorname{sn}_1 gx = k^{\frac{n}{2}} \operatorname{sn} x \prod \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{m}{n} 2K - \operatorname{sn}^2 x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{m}{n} 2K \operatorname{sn}^2 x},$$

$$\sqrt{\frac{k_1}{k'_1}}\,\operatorname{cn}_1 gx = \left(\frac{k}{k'}\right)^{\frac{n}{2}} \operatorname{cn} x \prod \left(\frac{\operatorname{cn}^2 \frac{m}{n} 2K + \operatorname{cn}^2 x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{m}{n} 2K \operatorname{sn}^2 x} - 1\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{k'_1}}\,\operatorname{dn}_1 gx = \left(\frac{1}{k'}\right)^{\frac{n}{2}} \operatorname{dn} x \prod \left(\frac{\operatorname{dn}^2 \frac{m}{n} 2K + \operatorname{dn}^2 x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{m}{n} 2K \operatorname{sn}^2 x} - 1\right).$$

Si, dans la première formule, on fait $x = 0$ après avoir divisé par x, il vient

$$\sqrt{k_1}\,g = k^{\frac{n}{2}} \prod \operatorname{sn}^2 \frac{m}{n} 2K;$$

en faisant $x = 0$ dans les autres, on a

$$\sqrt{\frac{k_1}{k'_1}} = \left(\frac{k}{k'}\right)^{\frac{n}{2}} \prod \operatorname{cn}^2 \frac{m}{n} 2K,$$

$$\sqrt{\frac{1}{k'_1}} = \left(\frac{1}{k'}\right)^{\frac{n}{2}} \prod \operatorname{dn}^2 \frac{m}{n} 2K.$$

On tire de ces dernières équations

$$(m)\qquad k_1^2 = k^{2n} \prod \frac{\operatorname{cn}^8 \frac{m}{n} 2K}{\operatorname{dn}^8 \frac{m}{n} 2K},$$

$$k_1'^2 = k'^{2n} \prod \frac{1}{\operatorname{dn}^8 \frac{m}{n} 2K}.$$

On diviserait d'une façon analogue la période K′ par un nombre impair.

Les modules k_1 et k des fonctions $\operatorname{sn}_1 gx$ et $\operatorname{sn} x$ sont liés entre eux par la relation (m); cette relation est ce que l'on appelle l'*équation modulaire;* elle tient une place importante dans la théorie des équations et nous n'avons pas à nous en occuper ici.

CHAPITRE X.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

I. — Sur les arcs d'ellipse.

C'est l'étude des arcs d'ellipse qui a donné naissance à la théorie des fonctions elliptiques; c'est par l'étude des arcs d'ellipse que nous commencerons les applications géométriques de cette théorie.

Nous poserons avec Legendre

$$(1) \qquad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \mathrm{F}(\varphi) = \mathrm{F}(k,\varphi),$$

et nous aurons

$$(2) \qquad \sin\varphi = \operatorname{sn}\mathrm{F}, \qquad \varphi = \operatorname{am}\mathrm{F};$$

nous poserons aussi

$$(3) \qquad \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \mathrm{E}(\varphi) = \mathrm{E}(k,\varphi);$$

nous trouverons alors

$$\mathrm{E}(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \int_0^\varphi \frac{k^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi.$$

Nous désignerons la seconde intégrale par $\mathrm{J}(\varphi)$; nous aurons ainsi

$$(4) \qquad \mathrm{E}(\varphi) = \mathrm{F}(\varphi) - \mathrm{J}(\varphi) \quad \text{ou} \quad \mathrm{J}(\varphi) = \mathrm{F}(\varphi) - \mathrm{E}(\varphi).$$

D'ailleurs on a

$$(5) \qquad \mathrm{J}(\operatorname{am}\mathrm{F}) = \mathrm{Z}(\mathrm{F}).$$

Considérons une ellipse d'axes $2a$ et $2b$; elle peut être représentée par les équations

$$x = a \sin\varphi, \qquad y = b \cos\varphi;$$

on en conclut, en appelant s l'arc,

$$ds = \sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi$$

ou, en comptant l'arc à partir du sommet,

$$s = \int_0^\varphi \sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi$$

ou

$$s = a \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

En posant

$$k = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

on a donc

$$s = \mathrm{E}(\varphi) = \mathrm{F}(\varphi) - \mathrm{J}(\varphi),$$

si l'on suppose $a = 1$; $\mathrm{E}(\varphi)$ représente, comme on voit, l'arc d'ellipse. Si l'on prend F pour variable, on a, pour représenter l'ellipse, les équations

$$(6) \qquad \begin{cases} x = \operatorname{sn}\mathrm{F}, \qquad y = b \operatorname{cn}\mathrm{F} = k' \operatorname{cn}\mathrm{F}, \\ s = \mathrm{F} - \mathrm{Z}(\mathrm{F}). \end{cases}$$

II. — Théorème de Fagnano.

Si, dans les formules d'addition des fonctions de seconde espèce

$$\mathrm{Z}(x+y) - \mathrm{Z}(x) - \mathrm{Z}(y) = k^2 \operatorname{sn}x \operatorname{sn}y \operatorname{sn}(x+y),$$

on pose $\varphi = \operatorname{am}x$, $\psi = \operatorname{am}y$, on trouve, en vertu de (5),

$$\mathrm{J}(\varphi+\psi) - \mathrm{J}(\varphi) - \mathrm{J}(\psi) = k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin(\varphi+\psi)$$

ou, en vertu de (4),

$$\begin{aligned} &\mathrm{F}(\varphi+\psi) - \mathrm{E}(\varphi+\psi) - \mathrm{F}(\varphi) - \mathrm{F}(\psi) + \mathrm{E}(\varphi) + \mathrm{E}(\psi) \\ &\quad = k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin(\varphi+\psi); \end{aligned}$$

en observant que $F(\varphi+\psi) = F(\varphi) + F(\psi)$, puisque

$$\varphi = \operatorname{am} F(\varphi), \qquad \psi = \operatorname{am} F(\psi)$$

et

$$\varphi + \psi = \operatorname{am} F(\varphi+\psi),$$

on a simplement

$$E(\varphi+\psi) - E(\varphi) - E(\psi) = -k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin(\varphi+\psi);$$

si l'on fait $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$ et si l'on appelle $4E$ le périmètre total de l'ellipse de demi-axes 1 et k', on a

$$E - E(\varphi) - E(\psi) = -k^2 \sin\varphi \sin\psi.$$

Cette formule montre que les arcs $E - E(\varphi)$ et $E(\psi)$ ont une différence rectifiable. Les anomalies φ et ψ des extrémités de ces arcs sont liées par la formule

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \left(1 - k^2 \sin^2\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$0 = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi k'$$

ou

$$\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi = \frac{1}{k'}.$$

De là découle le théorème de Fagnano :

Théorème. — *Soient* φ *et* ψ *deux anomalies telles que*

$$\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi = \frac{1}{k'};$$

les points M *et* N *qu'elles déterminent sur l'ellipse sont les extrémités de deux arcs comptés l'un à partir d'un sommet relatif au petit axe, l'autre à partir du sommet relatif au grand axe; la différence de ces arcs sera rectifiable.*

Nous allons donner sous une forme élégante l'expression de cette différence : l'équation de la normale à l'ellipse est

$$x\cos\varphi - k'y\sin\varphi - k^2\sin\varphi\cos\varphi = 0;$$

la distance l du centre à cette normale est

$$l = \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

Si l'on se donne l, on en déduit deux valeurs φ et ψ pour l'anomalie φ données par l'équation

$$\tang^4\varphi + \tang^2\varphi\left(\frac{1}{k'^2} + 1 - \frac{k^4}{k'^2 l^2}\right) + \frac{1}{k'^2} = 0;$$

on en conclut

$$(1)\quad \tang\varphi \tang\psi = \frac{1}{k'^2}, \qquad \tang^2\varphi + \tang^2\psi = -\frac{1}{k'^2} - 1 + \frac{k^4}{k'^2 l^2}.$$

La différence que nous voulons évaluer est

$$k^2 \sin\varphi \sin\psi,$$

dont le carré est

$$k^4 \sin^2\varphi \sin^2\psi = 4 k^4 \frac{\tang^2\varphi \tang^2\psi}{1 + \tang^2\varphi \tang^2\psi + \tang^2\varphi + \tang^2\psi};$$

en vertu des formules (1), cette expression se réduit à l^2 et, par conséquent, la différence entre les deux arcs en question est mesurée par la longueur l.

III. — Théorèmes de Graves, Mac Cullagh et Chasles.

Considérons deux coniques homofocales C *et* C'; *par un point* M *de* C' *on mène deux tangentes* MN *et* MP *à* C. *Le D*r *Graves a prouvé que, si la conique* C *était une ellipse ainsi que* C', *l'expression*

$$MN + MP - \text{arc}\, NP$$

était constante; Mac Cullagh et M. Chasles ont démontré que, si C' *était une hyperbole coupant* C *en* K, *on avait*

$$MN - MP = \text{arc}\, KN - \text{arc}\, KP.$$

En effet, appelons α et β les angles que les droites MN et MP font avec la tangente en M à la conique C'; appelons $d\sigma$ un

déplacement donné au point M sur la conique C′ et ds, dt les déplacements correspondant des points N et P; nous aurons, en vertu d'un théorème connu,

$$\begin{aligned} d.\mathrm{MN} &= ds + d\sigma\cos\alpha,\\ d.\mathrm{MP} &= -dt + d\sigma\cos\beta. \end{aligned}$$

Si la conique C′ est une ellipse, $\cos\alpha = -\cos\beta$ et, en ajoutant, on a

$$d(\mathrm{MN}+\mathrm{MP}) = ds - dt = d(s-t);$$

d'où

$$\mathrm{MN}+\mathrm{MP} = s - t + \text{const.} = \text{arc}\,\mathrm{NP} + \text{const.},$$

ce qui démontre le théorème de Graves.

Si la courbe C′ est une hyperbole,

$$\cos\alpha = \cos\beta$$

et l'on a

$$d.(\mathrm{MN}-\mathrm{MP}) = ds + dt;$$

si l'on compte les arcs à partir du point K, ds et dt sont de signes contraires, et l'on voit que ds et dt sont les accroissements subis à gauche et à droite de K par l'arc NP; $s+t$ sera alors la différence KN et KP; cette différence, comme on voit, est, à une constante près, égale à MN — MP et cette constante est nulle en K, ce qui démontre le théorème de Mac Cullagh.

Au fond le théorème de Mac Cullagh, comme celui de Fagnano, apprend à trouver des arcs d'ellipse à différence rectifiable.

Les théorèmes précédents s'appliquent évidemment aux coniques sphériques.

Soient C *une ellipse fixe,* S *un cercle tangent en* M; *soient* NK *et* N′K *des tangentes communes au cercle et à l'ellipse,* N *et* N′ *les points de contact sur l'ellipse, on aura*

$$\mathrm{NK} - \mathrm{N'K} = \text{arc}\,\mathrm{MN} - \text{arc}\,\mathrm{MN'}. \qquad \text{(Chasles.)}$$

Ce théorème se démontre comme les précédents, en déplaçant infiniment peu le cercle.

IV. — Théorème de Landen.

L'ellipse peut être représentée par les équations

$$x = a \operatorname{cn} u, \qquad y = b \operatorname{sn} u,$$

l'hyperbole par les suivantes

$$x = ak' \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}, \qquad y = \frac{ak}{k'} \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u};$$

les axes sont alors a et $\frac{ak}{k'}$.

Si l'on pose $\varphi = \operatorname{am} u$, on a

$$x = ak' \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \qquad y = \frac{ak}{k'} \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}{\cos\varphi};$$

on en conclut, pour l'expression de l'arc s d'hyperbole et en supposant $a = 1$,

$$ds^2 = \frac{k'^2 d\varphi^2}{\cos^4\varphi(1 - k^2 \sin^2\varphi)}$$

ou

$$s = k' \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

Or on a

$$d \operatorname{tang}\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$$
$$= d\varphi \left[\frac{k'^2}{\cos^2\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} + \frac{k^2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} - \frac{k^2 \sin^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \right];$$

en intégrant alors de o à φ, il vient

$$\operatorname{tang}\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = k's - k'^2 \mathrm{F}(\varphi) + \mathrm{E}(\varphi);$$

donc l'arc d'hyperbole peut s'exprimer au moyen des fonctions E et F. Nous allons prouver que la fonction F s'exprime au moyen de $\mathrm{E}(\varphi)$ et d'un autre arc d'ellipse; il en résultera que :

Théorème. — *Tout arc d'hyperbole peut s'exprimer au moyen de deux arcs d'ellipses différentes.*

La transformation de Landen donne lieu (p. 177) aux formules suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}} = \dfrac{1+k}{2}\dfrac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \\ \sin^2\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(1+k\sin^2\varphi - \cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\right), \\ k = \dfrac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}. \end{cases}$$

Multiplions membre à membre les deux premières formules : nous aurons, en intégrant de o à φ,

$$\frac{1}{k_1^2}\,J(k_1, \varphi_1) = \frac{1+k}{4k}\,J(k, \varphi) + \frac{1+k}{4}\,F(k, \varphi) - \frac{1+k}{4}\sin\varphi.$$

Or $J(\varphi) = F(\varphi) - E(\varphi)$; donc

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k_1^2}[F(k_1, \varphi_1) - E(k_1, \varphi_1)] \\ &\quad = \frac{1+k}{4k}\left[F(k, \varphi) - E(k, \varphi) + \frac{1+k}{4}F(k, \varphi) - \frac{1+k}{4}\sin\varphi\right]. \end{aligned}$$

Mais, en vertu de la première formule (1),

$$F(k_1, \varphi_1) = \frac{1+k}{2}\,F(k, \varphi);$$

la formule précédente devient alors

$$F(k, \varphi) = \frac{2}{k'}\,[E(k, \varphi) - (1+k)E(k_1, \varphi_1) + k\sin\varphi].$$

Cette formule de Landen montre que F est exprimable linéairement au moyen de deux fonctions E, ce qui démontre le théorème que nous avons énoncé au sujet de l'arc hyperbolique (*Philosophical Transactions*, 1775; *Mathematical Memoirs*, by John Landen, 1780).

V. — Courbes de M. J.-A. Serret.

M. Serret s'est proposé de rechercher toutes les courbes algébriques dont l'arc est exprimable au moyen des fonctions

elliptiques (*Journal de Liouville*, t. X, 1re série; *voir* aussi son *Traité de Calcul différentiel et intégral*). Voici seulement les résultats auxquels il est parvenu. Soit n une quantité plus grande que un, posons

$$U = \frac{t-1+R\sqrt{-1}}{\sqrt{2(n-1)t}}, \qquad V = \frac{t+1-R\sqrt{-1}}{\sqrt{2(n+1)t}},$$
$$R = \sqrt{-(t^2-2nt+1)}.$$

On en tire, en supposant le radical réel, c'est-à-dire t compris entre les racines du trinôme $t^2-2tn+1$,

$$\frac{U'}{U} = -\sqrt{-1}\,\frac{t+1}{2tR}, \qquad \frac{V'}{V} = \sqrt{-1}\,\frac{t-1}{2tR};$$

on fait ensuite

(1) $$x+y\sqrt{-1} = \sqrt{t}\,U^{\frac{n-1}{2}}V^{\frac{n+1}{2}};$$

on en conclut

$$\frac{x'+y'\sqrt{-1}}{x+y\sqrt{-1}} = \frac{R+\sqrt{-1}(t-n)}{2tR}$$

ou, en prenant les modules,

$$\frac{x'^2+y'^2}{x^2+y^2} = \frac{n^2+1}{4t^2R^2}.$$

Or on trouve $x^2+y^2=t$, au moyen de la relation (1); on a donc, en appelant s l'arc de courbe,

$$\sqrt{x'^2+y'^2} = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{2R\sqrt{t}}$$

ou bien

$$s = \int \frac{\sqrt{n^2-1}\,dt}{2R\sqrt{t}}$$

ou enfin

$$s = \int \frac{\sqrt{n^2-1}\,dt}{2\sqrt{t(-t^2+2nt-1)}}.$$

Les courbes dont x et y seront fournis en fonction de t en égalant les termes réels et les coefficients de $\sqrt{-1}$ dans (1)

seront donc telles : 1° que x et y seront fonctions algébriques de t; 2° que leur arc sera une fonction elliptique de t.

Si l'on fait, par exemple, $n = 3$, on a

$$x + y\sqrt{-1} = \sqrt{t}\,\frac{t - 1 + R\sqrt{-1}}{2\sqrt{t}}\left(\frac{t + 1 - R\sqrt{-1}}{2\sqrt{2t}}\right)^2$$

et, par suite, en observant que $R = \sqrt{-t^2 + 6t - 1}$,

$$x = \frac{t^2 + 4t - 1}{4t},$$

$$y = \frac{1 - t}{4t} R.$$

L'élimination de t entre ces équations donne

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2);$$

c'est l'équation d'une lemniscate de Bernoulli.

Observons encore que les courbes qui ont pour équations en coordonnées polaires

$$r = a \cos m\theta \qquad \text{ou} \qquad r = a \sin m\theta,$$

a désignant une constante; que le limaçon de Pascal ou conchoïde du cercle qui a pour équation

$$r = a + R\cos\theta,$$

a et R désignant des constantes, ont leurs arcs exprimables par les fonctions elliptiques.

Mentionnons encore les épicycloïdes allongées ou raccourcies, dont les équations sont de la forme

$$x = a \sin mu + b \sin nu,$$

$$y = a \cos mu + b \cos nu,$$

a, b, m, n désignant des constantes et u un angle variable; on a

$$ds^2 = [a^2 + b^2 + 2ab\cos(m - n)u]\,du^2,$$

$$ds^2 = \left[(a + b)^2 \cos^2\frac{m - n}{2}\,u + (a - b)^2 \sin^2\frac{m - n}{2}\,u\right] du^2$$

et, par suite

$$ds = \frac{a+b}{2}\,du\sqrt{1-\left[1-\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right]\sin^2\frac{m-n}{2}u};$$

ces courbes, comme l'on sait, sont algébriques toutes les fois que m et n sont commensurables.

Les courbes ayant pour équations

$$r = \frac{a}{\sin m\theta}, \qquad r = \frac{b}{\cos m\theta}$$

ont également leurs arcs exprimables par les fonctions elliptiques.

VI. — Démonstration d'un théorème de Poncelet.

Étant données deux coniques, en les rapportant à un triangle autopolaire commun, on pourra mettre leurs équations sous les formes

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$
$$ax^2 + by^2 - z^2 = 0;$$

on satisfait à la première de ces équations en prenant

$$(1) \qquad \frac{x}{\operatorname{cn}\varphi} = \frac{y}{\operatorname{sn}\varphi} = \frac{z}{1}$$

et à la seconde en prenant

$$(2) \qquad \frac{x}{\operatorname{cn}\psi} = \frac{y}{\operatorname{sn}\psi\operatorname{dn}\theta} = \frac{z}{\operatorname{cn}\theta},$$

pourvu que l'on fasse

$$\operatorname{cn}\theta = \frac{1}{\sqrt{a}}, \qquad \frac{\operatorname{cn}\theta}{\operatorname{dn}\theta} = \frac{1}{\sqrt{b}},$$

ce qui est possible en choisissant convenablement le module k des fonctions elliptiques.

Soit M_0 un point de la première conique; par ce point

menons une tangente coupant la seconde en N_0 et N'_0, l'équation de cette tangente sera

$$x \operatorname{cn}\varphi + y \operatorname{sn}\varphi - z = 0,$$

et les coordonnées des points N_0 et N'_0 ou, mieux, les valeurs de ψ en ces points s'obtiendront en éliminant x, y, z entre cette équation et (2), ce qui donnera

$$\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi \operatorname{dn}\theta = \operatorname{cn}\theta.$$

La comparaison de cette formule avec celle de Lagrange (p. 207) donne

$$\theta = \pm(\varphi - \psi) \quad \text{ou} \quad \psi = \varphi \pm \theta.$$

Supposons alors que l'on mène par le point N_0 *une tangente à la première conique rencontrant la seconde en* N_1 *et touchant la première en* M_1; *que par* N_1 *on mène une tangente à la première conique coupant la deuxième en* N_2 *et touchant la première en* M_2, *etc., le lieu des points de rencontre de* M_0N_0 *et* M_nN_n *sera une conique.*

Ce théorème a été établi péniblement, pour la première fois, par Poncelet. Pour le démontrer, nous observerons que, si l'on appelle φ_0 la valeur φ en M_0, la valeur de ψ en N_1 sera $\theta + \varphi_0$, la valeur de φ en M_1 sera alors $\varphi_0 + 2\theta$, celle de ψ en N_1 sera $\varphi_0 + 3\theta$, ..., la valeur de φ en M_n sera $\varphi_0 + 2n\theta$; le lieu cherché s'obtiendra alors en éliminant φ_0 entre les équations des tangentes en M_0 et M_n, ou

(3) $$x \operatorname{cn}\varphi_0 + y \operatorname{sn}\varphi_0 - z = 0,$$

$$x \operatorname{cn}(\varphi_0 + 2n\theta) + y \operatorname{sn}(\varphi_0 + 2n\theta) - z = 0;$$

en combinant ces équations, on a

$$x[\operatorname{cn}(\varphi_0 + 2n\theta) - \operatorname{cn}\varphi_0] + y[\operatorname{sn}(\varphi_0 + 2n\theta) - \operatorname{sn}\varphi_0] = 0$$

ou bien

$$-x \operatorname{sn} n\theta \operatorname{dn} n\theta \operatorname{sn}\varphi_0 \operatorname{dn}\varphi_0 + y \operatorname{sn} n\theta \operatorname{cn}\varphi_0 \operatorname{dn}\varphi_0 = 0;$$

on en tire

$$\frac{\operatorname{sn}\varphi_0}{\operatorname{cn}\varphi_0} = \frac{y}{x}\,\frac{1}{\operatorname{dn} n\theta} = m\,\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\varphi_0;$$

en posant $m = \frac{1}{\operatorname{dn} n\theta}$, on en conclut, en portant cette valeur dans (3),

$$x^2 + my^2 - z\sqrt{my^2 + x^2} = 0$$

ou

$$x^2 + my^2 - z^2 = 0.$$

Le lieu est donc une conique qui a le même triangle autopolaire que les coniques données. On voit que, si $m = \frac{1}{\operatorname{dn}.n\theta} = 1$ ou que si $n\theta$ est égal à $2p\mathrm{K}$, le lieu coïncidera avec la seconde conique, ce qui constitue une nouvelle démonstration du théorème de Poncelet, démontré par Jacobi (p. 211).

Le théorème de Poncelet peut être transformé par polaires réciproques; il fournit alors un théorème corrélatif que nous pouvons nous dispenser d'énoncer.

VII. — Roulette de Delaunay.

La roulette de Delaunay est engendrée par le foyer d'une conique qui roule sans glisser sur une droite.

Supposons que la conique soit une ellipse, et soit

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$$

l'équation de cette conique rapportée à ses axes; soit

$$\sqrt{a^2 - b^2} = c$$

la demi-distance focale; sur la tangente en x', y' prenons une longueur égale à l'arc s' de la courbe comptée depuis le sommet $(a, 0)$ jusqu'au point (x', y'). Soient y la distance du foyer à cette tangente et x la distance du pied de la perpendiculaire y à l'extrémité de la distance s' comptée à partir du point (x', y'), les quantités x, y seront les coordonnées d'un point

de la roulette par rapport à une droite fixe sur laquelle la conique peut être censée rouler, et l'on aura

$$y = b\sqrt{\frac{a^2 - cx'}{a^2 + cx'}},$$
$$x = s' - \frac{cyy'}{b^2}.$$

L'élimination de x', y' entre ces équations et celle de l'ellipse fera connaître la roulette. Pour faire cette élimination, nous ferons $x' = a\cos\varphi$, $y' = b\sin\varphi$ et nous aurons

$$(1)\qquad \begin{cases} y = b\sqrt{\dfrac{a - c\cos\varphi}{a + c\cos\varphi}}, \\ x = \displaystyle\int\sqrt{a^2 - c^2\sin^2\varphi}\,d\varphi - \dfrac{cy\sin\varphi}{b}. \end{cases}$$

Cette courbe dépend, comme on devait s'y attendre, des fonctions elliptiques, et, si l'on veut voir apparaître explicitement ces fonctions, il suffit de faire $\varphi = \operatorname{am} t$.

L'élimination de φ donne

$$(2)\qquad dx = \frac{(b^2 + y^2)\,dy}{\sqrt{4a^2y^2 - (b^2 + y^2)^2}};$$

lorsque l'on fait $\dfrac{b^2}{a} = p$ et $a = \infty$, cette formule devient

$$dx = \frac{p\,dy}{\sqrt{4y^2 - p^2}};$$

on en déduit, en n'ajoutant pas de constante,

$$x = \frac{p}{2}\log\left[\left(y + \sqrt{y^2 - \frac{p^2}{4}}\right)\frac{2}{p}\right]$$

ou

$$\frac{2}{p}\left(y + \sqrt{y^2 - \frac{p^2}{4}}\right) = e^{\frac{2x}{p}},$$
$$\frac{2}{p}\left(y - \sqrt{y^2 - \frac{p^2}{4}}\right) = e^{-\frac{2x}{p}};$$

on en conclut

$$y = \frac{p}{4}\left(e^{\frac{2x}{p}} + e^{-\frac{2x}{p}}\right).$$

Ainsi, *le lieu des positions des foyers d'une parabole qui roule sans glisser sur une droite est une chaînette.*

La roulette de Delaunay contient donc la chaînette comme cas particulier.

On rencontre la roulette de Delaunay dans diverses circonstances, par exemple quand on cherche une surface de révolution ayant ses deux rayons de courbure R et R′ liés par la relation

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{a},$$

a désignant une constante. En effet, si l'on cherche le méridien de cette surface, on voit que ce méridien est tel que, la normale étant désignée par N, on a

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{N} = \frac{1}{a},$$

R désignant le rayon de courbure de ce méridien. Il est facile de voir que ce méridien est une roulette de Delaunay : en effet, son équation différentielle est

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{1}{y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a}$$

ou bien

$$(3) \qquad \frac{y'\,dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{dy}{y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{dy}{a}.$$

En multipliant par y, on a

$$\frac{yy'\,dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{dy}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y\,dy}{a};$$

le premier membre est la différentielle de $\frac{-y}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}$ quand on choisit le signe —, ce que nous ferons, et nous aurons, en appelant b^2 une constante,

$$\frac{-y}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y^2+b^2}{a};$$

on en conclut

$$y' = \frac{\sqrt{4a^2y^2 - (b^2 + y^2)^2}}{y^2 + b^2},$$

ce qui équivaut à l'équation (2) de la roulette de Delaunay.

VIII. — La courbe élastique.

La courbe dont le rayon de courbure est proportionnel à l'inverse de l'ordonnée ou de l'abscisse a une équation de la forme

$$y = \int_0^x \frac{x^2 + c}{\sqrt{a^2 - (x^2 + c)^2}}\,dx;$$

x et y pourront donc s'exprimer par le moyen des fonctions elliptiques de première et de seconde espèce. Cette courbe est la forme que prend une poutre déformée sous l'influence de poids uniformément répartis sur sa longueur, lorsqu'elle repose sur deux appuis situés de niveau.

IX. — Surface de l'ellipsoïde.

La surface de l'ellipsoïde à trois axes inégaux

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

s'obtient au moyen des fonctions elliptiques; nous satisfaisons à l'équation précédente en posant

$$x = a\cos\psi\sin\theta, \qquad y = b\sin\psi\sin\theta, \qquad z = c\cos\theta.$$

L'élément de surface est

$$\sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2\right]\cdots}\; d\theta\, d\psi$$

ou bien, tous calculs faits,

$$\sin\theta\sqrt{b^2c^2\cos^2\psi\sin^2\theta + a^2c^2\sin^2\psi\sin^2\theta + a^2b^2\cos^2\theta}\; d\theta\, d\psi;$$

l'aire de l'ellipsoïde sera donc

$$\iint \sqrt{\frac{\cos^2\psi \sin^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\psi \sin^2\theta}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}}\, abc \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Une première intégration peut être effectuée par rapport à θ de o à π; à cet effet, on fait $-\cos\theta = u$, et l'on a

$$\iint \sqrt{\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}}\sqrt{1 - G^2u^2}\, abc\, du\, d\psi,$$

en posant

$$(1) \qquad -G^2 = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{\cos^2\psi}{a^2} - \frac{\sin^2\psi}{b^2}\right) : \left(\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}\right).$$

On peut toujours supposer G^2 positif, c'est-à-dire

$$\frac{1}{c^2} < \frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2};$$

en effet, faisant $b < a$, le second membre de cette égalité est inférieur à $\frac{1}{b^2}$; et, en supposant $c > a$ et b, cette égalité est toujours satisfaite. En nous plaçant dans cette hypothèse, notre intégrale devient

$$\int \frac{\pi abc}{2G}\sqrt{\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}}\, d\psi$$

(on facilite le calcul en observant que $\int \sqrt{\frac{1}{G^2} - u^2}\, du$ est l'aire d'un demi-cercle de rayon $\frac{1}{G}$); en remplaçant G par sa valeur, il vient

$$\pi abc \int_0^{2\pi} \frac{\dfrac{\cos^2\psi}{a^2} + \dfrac{\sin^2\psi}{b^2}}{\sqrt{-\dfrac{1}{c^2} + \dfrac{\cos^2\psi}{a^2} + \dfrac{\sin^2\psi}{b^2}}}\, d\psi,$$

et, en posant

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} = p, \qquad \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = q,$$

l'aire en question devient

$$\pi abc \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{a^2} + q \sin^2\psi}{\sqrt{p - q \sin^2\psi}}\, d\psi.$$

On peut supposer $q > 0$, $p > 0$; alors, en faisant $\frac{q}{p} = k^2$, on a

$$\pi abc \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{a^2\sqrt{p}} + \frac{q}{\sqrt{p}} \sin^2\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}}\, d\psi.$$

X. — Sur les courbes du premier genre, et en particulier sur les courbes du troisième degré.

Les courbes du premier genre jouissent de cette propriété que leurs coordonnées peuvent s'exprimer rationnellement au moyen d'une variable t et du radical $\sqrt{a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4}$, qu'on peut lui-même ramener à la forme $\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}$, de sorte que, si l'on fait $t = \operatorname{sn} u$, on voit que les coordonnées d'une courbe de genre *un* pourront également s'exprimer en fonction rationnelle de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

Toutes les courbes de genre *un* peuvent être ramenées, au moyen de transformations quadratiques, à des courbes du troisième degré; celles-ci, à leur tour, au moyen d'une transformation homographique (p. 62), se ramènent à un type simple représenté par l'équation

$$(1) \qquad y^2 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma),$$

où α, β, γ sont des constantes. Nous allons essayer de représenter les coordonnées de cette courbe au moyen des fonctions elliptiques. x et y seront (p. 286) de la forme

$$\begin{aligned} &\mathrm{M} + \mathrm{A\,Z}(t - a) + \mathrm{B\,Z}(t - b) \ldots \\ &\quad + \mathrm{A'Z'}(t - a) + \mathrm{B'Z'}(t - b) \ldots \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

M, A, B, ..., A′, B′, ..., a, ... désignant des constantes et

$Z(t)$ la fonction $\frac{H'(t)}{H(t)}$; a, b, ... sont alors les infinis de x ou y. Or y, en vertu de (1), a les mêmes infinis que x; si x a un infini simple, y a un infini d'ordre $\frac{3}{2}$, ce qui est inadmissible dans le mode de représentation adopté; x doit donc avoir au moins un infini double et y un infini triple : il faudra donc poser

$$x = M + AZ(t-a) + A'Z'(t-a),$$
$$y = N + BZ(t-a) + B'Z'(t-a) + B''Z''(t-a).$$

Rien n'empêche de supposer $a = 2K'\sqrt{-1}$: alors on a $Z(t-a) = \frac{\Theta'(t)}{\Theta(t)}$; il faut aussi observer que la somme des résidus A et B doit être nulle (p. 286) : donc $A = 0$, $B = 0$, et l'on peut écrire, au lieu des formules précédentes,

$$x = M + A' \frac{d}{dt} \frac{\Theta'(t)}{\Theta(t)},$$
$$y = N + B' \frac{d}{dt} \frac{\Theta'(t)}{\Theta(t)} + B'' \frac{d^2}{dt^2} \frac{\Theta'(t)}{\Theta(t)}.$$

Mais $\frac{\Theta'(t)}{\Theta(t)}$ est, à une constante près, la dérivée de l'intégrale de seconde espèce; on peut donc écrire

$$x = a + b \operatorname{sn}^2 t,$$
$$y = a' + b' \operatorname{sn}^2 t + c' \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t,$$

a, b, a', b', c' désignant des constantes, qui, bien entendu, n'ont plus aucun rapport avec celles que nous avons désignées ainsi tout à l'heure. Appelons t_1, t_2, t_3 les valeurs de t pour lesquelles on a $x = \alpha, \beta, \gamma$; on trouvera

$$\alpha = a + b \operatorname{sn}^2 t_1,$$
$$\beta = a + b \operatorname{sn}^2 t_2,$$
$$\gamma = a + b \operatorname{sn}^2 t_3$$

et

$$y^2 = b^3(\operatorname{sn}^2 t - \operatorname{sn}^2 t_1)(\operatorname{sn}^2 t - \operatorname{sn}^2 t_2)(\operatorname{sn}^2 t - \operatorname{sn}^2 t_3).$$

Or, y étant nul pour $t = \pm t_1, \pm t_2, \pm t_3$, on a

$$0 = a' + b' \operatorname{sn}^2 t_1 + c' \operatorname{sn} t_1 \operatorname{cn} t_1 \operatorname{dn} t_1,$$
$$0 = a' + b' \operatorname{sn}^2 t_1 - c' \operatorname{sn} t_1 \operatorname{cn} t_1 \operatorname{dn} t_1;$$

donc

$$a' + b' \operatorname{sn}^2 t_1 = 0, \qquad c' \operatorname{sn} t_1 \operatorname{cn} t_1 \operatorname{dn} t_1 = 0,$$
$$a' + b' \operatorname{sn}^2 t_2 = 0, \qquad c' \operatorname{sn} t_2 \operatorname{cn} t_2 \operatorname{dn} t_2 = 0,$$
$$a' + b' \operatorname{sn}^2 t_3 = 0, \qquad c' \operatorname{sn} t_3 \operatorname{cn} t_3 \operatorname{dn} t_3 = 0;$$

c' ne pouvant pas être nul, puisque y doit avoir un infini triple (et d'ailleurs, si c était nul, x et y seraient fonctions rationnelles de $\operatorname{sn}^2 t$), il faut que, t_1, t_2 et t_3 étant censés différents, on ait par exemple $\operatorname{sn} t_1 = 0$, $\operatorname{cn} t_2 = 0$ et $\operatorname{dn} t_3 = 0$. Alors $a' = 0$ et $b' = 0$; on a donc seulement

$$x = a + b \operatorname{sn}^2 t, \qquad y = c' \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t,$$

et par suite on doit avoir, en vertu de (1),

$$\begin{aligned} &c'^2 \operatorname{sn}^2 t (1 - \operatorname{sn}^2 t)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t) \\ &\quad = (a + b \operatorname{sn}^2 t - \alpha)(a + b \operatorname{sn}^2 t - \beta)(a + b \operatorname{sn}^2 t - \gamma); \end{aligned}$$

en identifiant, on a

$$(a - \alpha)(a - \beta)(a - \gamma) = 0;$$

donc une des quantités α, β, γ est égale à a. Soit $\alpha = a$: l'équation précédente devient

$$c'^2 (1 - \operatorname{sn}^2 t)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t) = b(\alpha - \beta + b \operatorname{sn}^2 t)(\alpha - \gamma + b \operatorname{sn}^2 t)$$

et, en identifiant,

$$\begin{aligned} c'^2 &= b(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma), \\ -c'^2(1 + k^2) &= b^2(2\alpha - \beta - \gamma), \\ c'^2 k^2 &= b^3. \end{aligned}$$

En ajoutant, on a

$$0 = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) + b[(\alpha - \beta) + (\alpha - \gamma)] + b^2,$$

d'où

$$b = \beta - \alpha \qquad \text{ou} \qquad \gamma - \alpha.$$

Si l'on prend $b = \beta - \alpha$, on trouve

$$c' = (\beta - \alpha)\sqrt{\gamma - \alpha}, \qquad k^2 = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha};$$

on a donc enfin, pour représenter la courbe (1), les formules

$$(2)\quad \begin{cases} x = \alpha + (\beta - \alpha)\,\mathrm{sn}^2 t = \beta\,\mathrm{sn}^2 t + \alpha\,\mathrm{cn}^2 t, \\ y = (\beta - \alpha)\sqrt{\gamma - \alpha}\,\mathrm{sn}\,t\,\mathrm{cn}\,t\,\mathrm{dn}\,t, \\ k = \sqrt{\dfrac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}}. \end{cases}$$

L'aire de la courbe pourra, comme l'on voit, s'exprimer aussi par le moyen des fonctions elliptiques ; on trouve

$$y\,dx = 2(\beta - \alpha)^2\sqrt{\gamma - \alpha}\,\mathrm{sn}^2 t\,\mathrm{cn}^2 t\,\mathrm{dn}^2 t\,dt.$$

XI. — Quelques propriétés des courbes du troisième degré.

Nous ferons usage du théorème d'Abel, démontré page 154. En vertu de ce théorème, si l'on coupe une courbe du troisième degré

$$f(x, y) = 0$$

par une courbe variable et si l'on appelle (x_1, y_1), ..., (x_i, y_i), ... les coordonnées des points d'intersection, on doit avoir

$$\sum \frac{dx_i}{f_2(x_i, y_i)} = 0,$$

$f_2(x, y)$ désignant, pour abréger, la dérivée $\frac{\partial f}{\partial y}$. Nous ferons une première application de cette formule en supposant que la courbe variable se réduise à une ligne droite ; alors on devra avoir

$$\frac{dx_1}{f_2(x_1, y_1)} + \frac{dx_2}{f_2(x_2, y_2)} + \frac{dx_3}{f_2(x_3, y_3)} = 0.$$

Nous allons appliquer cette formule à la courbe du troisième degré considérée au paragraphe précédent, représentée par les équations

$$(1)\quad y^2 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

ou

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \beta\,\mathrm{sn}^2 t + \alpha\,\mathrm{cn}^2 t, \\ y = (\beta - \alpha)\sqrt{\gamma - \alpha}\,\mathrm{sn}\,t\,\mathrm{cn}\,t\,\mathrm{dn}\,t, \\ k = \sqrt{\dfrac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}}. \end{cases}$$

De ces formules on tire

$$dx = 2(\beta - \alpha)\,\mathrm{sn}\,t\,\mathrm{cn}\,t\,\mathrm{dn}\,t\,dt$$

et, par suite,

$$\frac{dx}{y} = \frac{2\,dt}{\sqrt{\gamma - \alpha}};$$

or

$$(3)\qquad y = \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$$

ou

$$y^2 - (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = 0,$$

donc ici $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$ et $\dfrac{dx}{2y} = \dfrac{dx}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}$; on doit par suite avoir, en appelant x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 les coordonnées de trois points en ligne droite sur la courbe (3),

$$\frac{dx_1}{y_1} + \frac{dx_2}{y_2} + \frac{dx_3}{y_3} = 0$$

ou, en appelant t_1, t_2, t_3 les t de ces points,

$$dt_1 + dt_2 + dt_3 = 0$$

ou enfin

$$t_1 + t_2 + t_3 = \text{const.}$$

Ainsi :

Théorème. — *Les t de trois points en ligne droite sur une courbe du troisième ordre ont une somme constante.*

Pour déterminer cette constante, nous supposerons les trois points sur l'axe des x; alors $y = 0$, et $\mathrm{sn}\,t\,\mathrm{cn}\,t\,\mathrm{dn}\,t = 0$; les valeurs de t correspondantes annulent $\mathrm{sn}\,t$, $\mathrm{cn}\,t$, $\mathrm{dn}\,t$ et l'on a

$$\begin{aligned} t_1 &= 2m\mathrm{K} + 2m'\mathrm{K}'\sqrt{-1}, \\ t_2 &= (2m+1)\mathrm{K} + 2m'\mathrm{K}'\sqrt{-1}, \\ t_3 &= (2m+1)\mathrm{K} + (2m'+1)\mathrm{K}'\sqrt{-1}; \end{aligned}$$

on trouve donc, pour la valeur de la constante,

$$(4)\qquad t_1 + t_2 + t_3 = 2mK + (2m' + 1)K'\sqrt{-1},$$

m et m' désignant des entiers quelconques.

Réciproquement, si la relation (4) a lieu, les points t_1, t_2, t_3 seront en ligne droite; car, en appelant t'_3 le t du point en ligne droite avec t_1 et t_2, on aura

$$t_1 + t_2 + t'_3 = 2mK + (2m' + 1)K'\sqrt{-1};$$

donc $t_3 = t'_3$.

Les points d'inflexion d'une courbe du troisième degré sont trois à trois en ligne droite.

En effet, un point d'inflexion s'obtiendra en supposant $t_1 = t_2 = t_3$ dans (4), ce qui donne pour son t

$$t = \frac{2mK}{3} + \frac{2m' + 1}{3}K'\sqrt{-1};$$

x et y seront distincts en prenant

$$\begin{aligned} t = {} & \frac{K'\sqrt{-1}}{3}, \quad \frac{3K'\sqrt{-1}}{3}, \quad \frac{5K'\sqrt{-1}}{3}, \\ & \frac{K'\sqrt{-1}}{3} + \frac{2K}{3}, \quad \frac{3K'\sqrt{-1}}{3} + \frac{2K}{3}, \quad \frac{5K'\sqrt{-1}}{3} + \frac{2K}{3}, \\ & \frac{K'\sqrt{-1}}{3} + \frac{4K}{3}, \quad \frac{3K'\sqrt{-1}}{3} + \frac{4K}{3}, \quad \frac{5K'\sqrt{-1}}{3} + \frac{4K}{3}; \end{aligned}$$

ce sont les t des neuf points d'inflexion.

La somme de trois quelconques d'entre eux est de la forme $2mK + (2m' + 1)K'\sqrt{-1}$; donc ils sont trois à trois en ligne droite. C. Q. F. D.

Théorème de Maclaurin. — *Si par un point* M *d'une courbe du troisième degré on mène des tangentes à la courbe, les points de contact autres que le point* M *sont tels que, si on les joint deux à deux, les droites ainsi menées concourent en un même point situé sur la courbe.*

Supposons que, par le point t, on mène des tangentes :

pour les points de contact, t_2 et t_3 seront égaux; on devra donc avoir

$$t_2 = t_3 = \frac{2mK + (2m'+1)K'\sqrt{-1} - t_1}{2};$$

les quatre points de contact ont donc pour t

$$\frac{K'}{2}\sqrt{-1} - \frac{t_1}{2}, \quad \frac{3K'\sqrt{-1}}{2} - \frac{t_1}{2},$$

$$\frac{K'\sqrt{-1}}{2} + K - \frac{t_1}{2}, \quad \frac{3K'\sqrt{-1}}{2} + K - \frac{t_1}{2};$$

la somme de deux de ces t est de la forme

$$(2m'+1)K'\sqrt{-1} + (2m+1)K - t_1$$

ou

$$2m'K'\sqrt{-1} + 2mK - t_1,$$

de sorte qu'à la première combinaison correspondent le point $t_1 + K$ et à la seconde le point $t_1 + K'\sqrt{-1}$, tous deux sur la courbe.

Soient M_1, M_2, M_3 *les points d'intersection d'une courbe du troisième degré avec une droite; les tangentes en* M_1, M_2, M_3 *rencontrent la courbe en trois points en ligne droite.*

En effet, soient t_1, t_2, t_3 les paramètres qui déterminent les coordonnées des points M_1, M_2, M_3, les tangentes en t_1, t_2, t_3 couperont la courbe en des points dont les paramètres seront θ_1, θ_2, θ_3, et l'on aura

$$\theta_1 + 2t_1 \equiv \theta_2 + 2t_2 \equiv \theta_3 + 2t_3 \equiv 2mK + (2m'+1)K'\sqrt{-1};$$

mais, comme

$$t_1 + t_2 + t_3 \equiv 2mK + (2m'+1)K'\sqrt{-1},$$

il viendra

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \equiv 2mK + (2m'+1)K'\sqrt{-1},$$

ce qui montre bien que les points déterminés par les paramètres θ_1, θ_2, θ_3 sont en ligne droite.

En particulier :

Les asymptotes d'une courbe du troisième degré rencontrent la courbe en trois points situés en ligne droite.

Ce théorème peut être généralisé et étendu à des courbes d'ordre supérieur : ainsi, si l'on coupe une courbe du quatrième degré par une droite, les tangentes aux points d'intersection rencontrent la courbe en huit points situés sur une conique, etc.

XII. — Les points Steiner dans les courbes du troisième ordre.

On appelle *points Steiner d'une courbe* ceux où une conique peut avoir avec elle un contact du cinquième ordre. Voici comment on peut mettre ces points en évidence sur les courbes du troisième ordre.

Si l'on coupe la courbe représentée par les équations (2) du paragraphe précédent par une conique, les six points d'intersection s'exprimeront au moyen de six paramètres t_1, t_2, ..., t_6 qui seront les valeurs qu'il faut attribuer à t dans les formules (2) en question, pour que x et y représentent les coordonnées d'un point d'intersection; ces six paramètres satisfont à la relation

$$dt_1 + dt_2 + \ldots + dt_6 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sum dt_i = 0;$$

d'où l'on déduira

$$\sum t_i = \text{const.}$$

Pour déterminer la constante, on peut supposer la conique réduite à deux droites, et alors, d'après ce que l'on a vu tout à l'heure, si t_1, t_2, t_3 sont les paramètres des intersections de la courbe avec l'une des droites, on aura

$$t_1 + t_2 + t_3 = 2mK + (2m' + 1)K'\sqrt{-1},$$
$$t_4 + t_5 + t_6 = 2m_1 K + (2m'_1 + 1)K'\sqrt{-1},$$

et, par suite, en appelant m et m' deux entiers quelconques,

$$\sum t_i = 2mK + 2m'K'\sqrt{-1}.$$

Réciproquement, si cette relation a lieu, les six points déterminés par les paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_6$ seront sur une conique.

En un point Steiner, six points confondus sont sur une conique; un point Steiner sera déterminé par l'équation

$$(1) \qquad 6t = 2mK + 2m'K'\sqrt{-1};$$

on tire de là les valeurs suivantes de t fournissant des valeurs distinctes de x et y :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} t \equiv 0, \ \frac{K}{3}, \ \frac{2K}{3}, \ \frac{3K}{3}, \ \frac{4K}{3}, \ \frac{5K}{3}, \ \frac{K'\sqrt{-1}}{3}, \\ \quad \frac{K}{3} + \frac{K'\sqrt{-1}}{3}, \ \ldots, \ \frac{5K}{3} + \frac{5K'\sqrt{-1}}{3}. \end{array} \right.$$

Ces valeurs sont au nombre de 36; il y a donc sur toute courbe du troisième degré 36 points Steiner, mais 9 de ces points coïncident avec les points d'inflexion où la conique osculatrice se réduit à deux droites confondues; il y a donc seulement $36 - 9 = 27$ points Steiner proprement dits.

Il est facile de voir que :

Deux points Steiner sont toujours en ligne droite avec un autre point Steiner, ou avec un point d'inflexion.

En effet, étant données deux des quantités (2), on en trouve toujours une troisième dont la somme fasse

$$2mK + (2m'+1)K'\sqrt{-1}.$$

Les points Steiner sont les points de contact des tangentes menées à la courbe par les points d'inflexion.

En effet, soient θ le paramètre d'un point d'inflexion,

t celui d'un point de contact d'une tangente menée par le point θ, on a

$$2t + \theta = 2mK + (2m' + 1)K'\sqrt{-1},$$
$$3\theta = 2m_1 K + (2m'_1 + 1)K'\sqrt{-1};$$

l'élimination de θ entre ces équations montre que l'on a

$$6t = 2m_2 K + 2m'_2 K'\sqrt{-1},$$

m_2 et m'_2 désignant deux entiers comme m, m', m_1 et m'_1. La formule (1), à laquelle satisfont les paramètres des points Steiner, montre bien que les points qui nous occupent sont les points Steiner, car ils sont au nombre de 27.

(Pour plus de détails sur les points d'inflexion et les points Steiner dans les courbes du troisième ordre, consulter la Thèse de M. Lemonnier.)

XIII. — Sur les biquadratiques gauches.

Deux surfaces du second degré, ou quadriques, se coupent en général suivant une courbe gauche du quatrième degré, que l'on a appelée *biquadratique gauche;* lorsque ces surfaces ont une génératrice commune, la biquadratique se décompose en une droite et en une courbe appelée *cubique gauche.*

Par une transformation homographique, on peut toujours ramener les équations de deux quadriques, et par suite d'une biquadratique gauche, à la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1, \\ \dfrac{k^2 x^2}{\alpha^2} + \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1; \end{cases}$$

il suffit pour cela, après avoir pris pour tétraèdre de référence le tétraèdre autopolaire commun, de transformer ce tétraèdre en un autre ayant une de ses faces à l'infini; on peut même, si l'on veut, supposer les trois autres faces rec-

tangulaires ; les deux quadriques se trouvent alors rapportées à leur centre et, en éliminant tour à tour z et y, on ramène leurs équations à la forme (1).

On satisfait aux équations (1) en posant

$$(2) \qquad x = \alpha \operatorname{sn} t, \qquad y = \beta \operatorname{cn} t, \qquad z = \gamma \operatorname{dn} t.$$

La courbe (1) donne donc une représentation géométrique toute naturelle des fonctions elliptiques.

Coupons la courbe (1) par un plan variable

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

d'après un théorème d'Abel (démontré p. 158) ; on devra avoir

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y_1, z_1)}} + \frac{dx_2}{\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y_2, z_2)}} + \frac{dx_3}{\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y_3, z_3)}} + \frac{dx_4}{\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y_4, z_4)}} = 0,$$

$(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_4, y_4, z_4)$ désignant les coordonnées des intersections du plan et de la courbe et φ, ψ désignant, pour abréger, les premiers membres des équations (1). En effectuant les calculs, on trouve

$$\frac{dx_1}{y_1 z_1} + \frac{dx_2}{y_2 z_2} + \frac{dx_3}{y_3 z_3} + \frac{dx_4}{y_4 z_4} = 0$$

ou, en remplaçant x, y, z par leurs valeurs tirées de (2),

$$dt_1 + dt_2 + dt_3 + dt_4 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum t = \text{const.},$$

en appelant t_1, t_2, t_3, t_4 les valeurs de t aux points où un plan coupe la biquadratique. On détermine la constante en faisant coïncider le plan sécant avec le plan des zy ; alors t_1, t_2, t_3, t_4 sont racines de $\operatorname{sn} t = 0$ et l'on a, en négligeant des multiples de $4K$ et de $4K'\sqrt{-1}$,

$$\sum t = 0.$$

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Lorsque quatre points d'une biquadratique sont dans un même plan, la somme de leurs t est $\equiv 0$

Réciproquement, il est clair que :

Si la somme des t de quatre points d'une biquadratique gauche représentée par les équations (2) *est égale à zéro, ces points sont dans un même plan.*

Si l'on suppose $t_1 = t_2 = t_3 = t_4$, le plan rencontrera la biquadratique en quatre points confondus, il sera surosculateur ou stationnaire; le t du point d'osculation sera donné par les formules

$$4t \equiv 0,$$

ce qui fournit seize points avec des coordonnées différentes correspondant aux valeurs suivantes de t

$$0, \quad K, \quad 2K, \quad 3K,$$

$$K'\sqrt{-1}, \quad K + K'\sqrt{-1}, \quad 2K + K'\sqrt{-1}, \quad 3K + K'\sqrt{-1},$$

. . . .

On démontrera facilement les théorèmes suivants :

Les seize points stationnaires sont quatre à quatre dans un même plan.

Car, trois d'entre eux étant donnés, il s'en trouve un autre tel que la somme de leurs t soit $\equiv 0$.

Deux points dont la somme des t est constante sont tels que la droite qui les joint engendre une surface du second ordre passant par la biquadratique : on peut obtenir de tels points en coupant la biquadratique par un plan passant par deux points fixes de cette biquadratique.

Le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes à la biquadratique est une courbe plane unicursale du quatrième ordre, ligne double de la surface développable lieu des tangentes à la biquadratique.

Toutes ces propriétés et beaucoup d'autres sont des conséquences de la formule

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \equiv 0.$$

Pour terminer cet aperçu, nous démontrerons un théorème récemment découvert par M. Cayley, et qui découle des considérations précédentes. Coupons la courbe

$$x = \operatorname{sn} t, \qquad y = \operatorname{cn} t, \qquad z = \operatorname{dn} t$$

par le plan

$$ax + by + cz + 1 = 0,$$

a, b, c désignant des constantes, l'équation

$$a \operatorname{sn} t + b \operatorname{cn} t + c \operatorname{dn} t + 1 = 0$$

en t qui en résulte détermine quatre valeurs de t dont la somme est $\equiv 0$. Si, dans cette équation, on exprime tout en fonction de $\operatorname{sn} t$, de $\operatorname{cn} t$ ou de $\operatorname{dn} t$, on obtient des équations du quatrième degré qui sont les suivantes, où l'on n'a écrit que les premiers et les derniers termes, seuls utiles,

$$\operatorname{sn}^4 t \ldots + \frac{(1+b+c)(-1+b+c)(1-b+c)(1+b-c)}{\left\{\begin{matrix}(a\sqrt{-1}+b+ck)(-a\sqrt{-1}+b+ck)\\ \times(a\sqrt{-1}-b+ck)(a\sqrt{-1}+b-ck)\end{matrix}\right\}} = 0,$$

$$\operatorname{cn}^4 t \ldots + \frac{(a+1+ck')\ldots}{(a\sqrt{-1}+b+ck)\ldots} = 0,$$

$$\operatorname{dn}^4 t \ldots + \frac{(a+bk'\sqrt{-1}+k)\ldots}{(a\sqrt{-1}+b+ck)\ldots} = 0.$$

On en conclut, en appelant t_1, t_2, t_3, t_4 les t des quatre points de la courbe situés dans le plan,

$$\begin{aligned}&k^2 K'^2 \operatorname{sn} t_1 \operatorname{sn} t_2 \operatorname{sn} t_3 \operatorname{sn} t_4\\ &\qquad - k^2 \operatorname{cn} t_1 \operatorname{cn} t_2 \operatorname{cn} t_3 \operatorname{cn} t_4 + \operatorname{dn} t_1 \operatorname{dn} t_2 \operatorname{dn} t_3 \operatorname{dn} t_4 = k'^2;\end{aligned}$$

telle est la relation qui lie les fonctions elliptiques sn, cn, dn de quatre quantités satisfaisant à la relation

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \equiv 0.$$

A cette relation correspond la suivante

$$\frac{k^2 k'^2 x_1 x_2 x_3 x_4}{\alpha^4} - \frac{k^2 y_1 y_2 y_3 y_4}{\beta^4} + \frac{z_1 z_2 z_3 z_4}{\gamma^4} = k'^2,$$

qui lie les coordonnées de quatre points de la biquadratique (1) situés dans un même plan.

XIV. — Surfaces monoïdes de M. Cayley.

M. Cayley appelle *surfaces monoïdes* (*Comptes rendus*, t. LIV et LVIII) les surfaces représentées par une équation de la forme

$$z = \theta(x, y),$$

θ désignant une fonction rationnelle de x et de y. Si l'on suppose cette surface d'ordre m, on pourra poser

$$z = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}, \tag{1}$$

φ désignant un polynôme de degré m et ψ un polynôme de degré $m - 1$.

La surface monoïde (1) a un point multiple d'ordre $m - 1$ à l'infini.

Toute courbe gauche est l'intersection d'une monoïde et d'un cylindre.

En effet, soient $P = 0$, $Q = 0$ les équations d'une courbe gauche, entre ces deux équations on peut éliminer z, ce qui donne une équation de la forme

$$f(x, y) = 0. \tag{2}$$

Cette équation (2) exprime que $P = 0$, $Q = 0$ ont une solution commune z, laquelle, comme on sait, s'exprime rationnellement en x et y; on peut donc poser (1)

$$z = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}.$$

La courbe gauche considérée est donc bien l'intersection du cylindre (2) et du monoïde (1).

Un plan coupe la courbe (1), (2) en mn points, si $f=0$ est de degré n et si la monoïde (1) est de degré m. Toutefois, la courbe (1), (2) ne sera que du degré $mn-\alpha$, si α désigne le nombre des solutions communes à

$$f=0, \qquad \varphi=0, \qquad \psi=0;$$

si ces équations ont effectivement α solutions communes, (1), (2) représenteront α droites parallèles à l'axe des y et une courbe d'ordre $mn-\alpha$.

XV. — Cubiques gauches.

On a donné le nom de *cubiques gauches* aux courbes d'intersection de deux quadriques ayant une génératrice commune. Les équations d'une cubique gauche peuvent donc être ramenées à la forme

$$\begin{aligned} Px + Qy &= 0, \\ P'x + Q'y &= 0, \end{aligned}$$

P, Q, P′, Q′ désignant des polynômes entiers du premier degré en x, y, z. Mais ces équations représentent avec la cubique l'axe des z, à savoir $x=0$, $y=0$.

Une transformation homographique ramènera ces équations à la forme

$$\begin{aligned} Gy - Hx &= 0, \\ Gt - Hz &= 0, \end{aligned}$$

où l'on peut supposer $t=1$, ce qui donne

$$\frac{G}{H} = \frac{x}{y} = \frac{z}{t},$$

G et H désignant deux polynômes du premier degré. On tire de là

$$z = \frac{tx}{y},$$

$$Gy - Hx = 0,$$

Si, dans $Gy - Hx$, on remplace z par sa valeur, on est ramené aux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} z = \dfrac{tx}{y}, \\ My - Nx = 0, \end{cases}$$

où M et N sont de second degré, mais ne renferment plus z. Le monoïde est ici un paraboloïde hyperbolique; quant au cylindre, il est du troisième degré, mais il est facile de voir que sa base présente un point double $x = 0$, $y = 0$; en effet, si l'on pose

$$\begin{aligned} G &= ax + by + cz + d, \\ H &= a'x + b'y + c'z + d, \end{aligned}$$

l'équation (1) devient

$$[(ax + by + d)y + cx]y + [(a'x + b'y + d')y + c'x]x = 0,$$

et il est clair que l'origine est un point double.

La courbe (1) est donc unicursale et, si l'on pose

$$\frac{x}{y} = u,$$

on pourra représenter cette courbe unicursale au moyen des deux équations

$$x = \frac{u\varphi(u)}{\psi(u)}, \qquad y = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)},$$

$\varphi(u)$ et $\psi(u)$ désignant des polynômes du second degré; de sorte que la cubique gauche pourra être, en définitive, représentée par trois équations, telles que

$$x = \frac{u\varphi(u)}{\psi(u)}, \qquad y = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)}, \qquad z = tu,$$

t désignant une constante, si l'on veut, égale à un. L'emploi des fonctions elliptiques n'est donc plus nécessaire pour représenter les cubiques gauches.

Résumé des principales formules elliptiques.

$$\Theta(x) = 1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} - \ldots \pm 2q^{n^2}\cos\frac{n\pi x}{K} \mp \ldots$$
$$= A\left(1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + q^2\right)\left(1 - 2q^3\cos\frac{\pi x}{K} + q^6\right)\left(1 - 2q^5\cos\frac{\pi x}{K} + q^{10}\right)\ldots,$$

$$\Theta_1(x) = 1 + 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} + \ldots + 2q^{n^2}\cos\frac{n\pi x}{K} + \ldots$$
$$= A\left(1 + 2q\cos\frac{\pi x}{K} + q^2\right)\left(1 + 2q^3\cos\frac{\pi x}{K} + q^6\right)\left(1 + 2q^5\cos\frac{\pi x}{K} + q^{10}\right)\ldots,$$

$$H(x) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi x}{2K} - 2q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{3\pi x}{2K} + \ldots \pm 2q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2K} \mp \ldots$$
$$= A\,2q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi x}{K}\left(1 - 2q^2\cos\frac{\pi x}{K} + q^4\right)\left(1 - 2q^4\cos\frac{\pi x}{K} + q^8\right)\ldots,$$

$$H_1(x) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{3\pi x}{2K} + \ldots + 2q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2K} + \ldots$$
$$= A\,2q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\pi x}{2K}\left(1 + 2q^2\cos\frac{\pi x}{K} + q^4\right)\left(1 + 2q^4\cos\frac{\pi x}{K} + q^8\right)\ldots;$$

$$A = (1 - q^2)(1 - q^4)\ldots(1 - q^{2n})\ldots,$$
$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}.$$

$$H(0) = 0, \qquad \Theta\left(K'\sqrt{-1}\right) = 0,$$
$$H_1(K) = 0, \qquad \Theta_1\left(K + K'\sqrt{-1}\right) = 0.$$

$$\Theta(x + K) = \Theta_1(x), \qquad \Theta_1(x + K) = \Theta(x),$$
$$H(x + K) = H_1(x); \qquad H_1(x + K) = -H(x).$$

$$\Theta\left(x + K'\sqrt{-1}\right) = \sqrt{-1}\,B\,H(x), \qquad \Theta_1\left(x + K'\sqrt{-1}\right) = B\,H_1(x),$$
$$H\left(x + K'\sqrt{-1}\right) = \sqrt{-1}\,B\,\Theta(x); \qquad H_1\left(x + K'\sqrt{-1}\right) = B\,\Theta_1(x).$$

$$B = e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4K}\left(2x + K'\sqrt{-1}\right)}.$$

$$\Theta\left(x + 2K'\sqrt{-1}\right) = -A\,\Theta(x), \qquad \Theta_1\left(x + 2K'\sqrt{-1}\right) = A\,\Theta_1(x),$$
$$H\left(x + 2K'\sqrt{-1}\right) = -A\,H(x); \qquad H_1\left(x + 2K'\sqrt{-1}\right) = A\,H_1(x).$$

$$A = e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}\left(x + K'\sqrt{-1}\right)}.$$

$$\operatorname{sn} x = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}, \qquad \sqrt{k} = \frac{\mathrm{H}_1(0)}{\Theta_1(0)},$$

$$\operatorname{cn} x = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)}, \qquad \sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)}.$$

$$\operatorname{dn} x = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)};$$

$$\sqrt{k} = \frac{2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + \ldots}, \qquad \sqrt{k'} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + \ldots},$$

$$\frac{\mathrm{K}\sqrt{k}}{\pi} = \frac{q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + \ldots}{1 - 2q + 2q^4 - \ldots}, \qquad \frac{\mathrm{K}\sqrt{k'}}{\pi} = \frac{q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + \ldots}.$$

$$\Theta_1(0) = \sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}}, \qquad \theta_1(0) = \sqrt{\frac{2\mathrm{K}'}{\pi}}.$$

$$\begin{aligned}\theta(x) &= 2p^{\frac{1}{4}}\cosh\frac{\pi x}{2\mathrm{K}'} + \ldots + 2p^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\cosh\frac{(2n+1)\pi x}{2\mathrm{K}'} + \ldots\\ &= \mathrm{A}\,2p^{\frac{1}{4}}\cosh\frac{\pi x}{2\mathrm{K}'}\left(1 + 2p^2\cosh\frac{\pi x}{\mathrm{K}'} + p^4\right)\left(1 + 2p^4\cosh\frac{\pi x}{\mathrm{K}'} + p^8\right)\ldots.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_1(x) &= 1 + 2p\cosh\frac{\pi x}{\mathrm{K}'} + 2p^4\cosh\frac{2\pi x}{\mathrm{K}'} + \ldots + 2p^{n^2}\cosh\frac{2\pi x}{\mathrm{K}'} + \ldots\\ &= \mathrm{A}\left(1 + p\cosh\frac{\pi x}{\mathrm{K}'} + p^2\right)\left(1 + p^3\cosh\frac{\pi x}{\mathrm{K}'} + p^6\right)\ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta(x) &= 2p^{\frac{1}{4}}\sinh\frac{\pi x}{2\mathrm{K}'} - 2p^{\frac{9}{4}}\sinh\frac{3\pi x}{2\mathrm{K}'} + \ldots \pm 2p^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\sinh\frac{2n+1}{2\mathrm{K}'}\pi x \mp \ldots\\ &= \mathrm{A}\,2p^{\frac{1}{4}}\sinh\frac{\pi x}{2\mathrm{K}'}\left(1 - 2p^2\cosh\frac{\pi x}{\mathrm{K}'} + p^4\right)\left(1 - 2p^4\cosh\frac{\pi x}{\mathrm{K}'} + p^8\right)\ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_1(x) &= 1 - 2p\cosh\frac{\pi x}{\mathrm{K}'} + 2p^4\cosh\frac{2\pi x}{\mathrm{K}'} - 2p^3\cosh\frac{3\pi x}{\mathrm{K}'} + \ldots\\ &= \mathrm{A}\left(1 - 2p\cosh\frac{\pi x}{\mathrm{K}'} + p^2\right)\left(1 - 2p^3\cosh\frac{\pi x}{\mathrm{K}'} + p^6\right)\ldots.\end{aligned}$$

$$\mathrm{A} = (1 - p^2)(1 - p^4)(1 - p^6)\ldots,$$

$$p = e^{-\pi\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}}.$$

$$\eta(0) = 0, \qquad \theta\left(\mathrm{K}'\sqrt{-1}\right) = 0,$$

$$\eta_1(\mathrm{K}) = 0; \qquad \theta_1\left(\mathrm{K} + \mathrm{K}'\sqrt{-1}\right) = 0.$$

$$\frac{\theta}{\Theta} = \frac{\eta}{\mathrm{H}} = \frac{\theta_1}{\Theta_1} = \frac{\eta_1}{\mathrm{H}_1} = \mathrm{C}\,e^{\frac{\pi x^2}{4\mathrm{KK}'}}.$$

$$\mathrm{C} = \sqrt{\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}}.$$

	$\operatorname{sn} x$.	$\operatorname{cn} x$.	$\operatorname{dn} x$.
Périodes.....	$4K,\ 2K'\sqrt{-1}$	$4K,\ 2K+2K'\sqrt{-1}$	$2K,\ 4K'\sqrt{-1}$
Zéros........	$0,\ 2K$	$K,\ -K$	$K+K'\sqrt{-1},\ -K+K'\sqrt{-1}$
Infinis.......	$K'\sqrt{-1},\ 2K+K'\sqrt{-1}$	Id.	Id.

Pour $x =$	VALEURS DE		
	$\operatorname{sn} x$.	$\operatorname{cn} x$.	$\operatorname{dn} x$.
0	0	1	1
$\frac{K}{2}$	$\frac{1}{k}\sqrt{1-k'}$	$\sqrt{\frac{k'}{1+k'}}$	$\sqrt{k'}$
$\frac{K'\sqrt{-1}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{-1}}$	$\sqrt{\frac{k-1}{k}}$	$\frac{k'}{\sqrt{1-k}}=\sqrt{1+k}$
K	1	0	k'
$2K$	0	-1	1
$K'\sqrt{-1}$	∞	∞	∞
$2K'\sqrt{-1}$	0	-1	-1
$2K+K'\sqrt{-1}$	∞	∞	∞
$K+K'\sqrt{-1}$	$\frac{1}{k}$	$-\frac{k'}{k}\sqrt{-1}$	0

$$\operatorname{sn}(-x) = -\operatorname{sn} x, \qquad \operatorname{sn}(2K \pm x) = \mp \operatorname{sn} x,$$
$$\operatorname{cn}(-x) = \operatorname{cn} x, \qquad \operatorname{cn}(2K \pm x) = \mp \operatorname{cn} x,$$
$$\operatorname{dn}(-x) = \operatorname{dn} x; \qquad \operatorname{dn}(2K \pm x) = \operatorname{dn} x.$$

$$\operatorname{sn}(K+x) = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}, \qquad \operatorname{sn}(K-x) = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x},$$
$$\operatorname{cn}(K+x) = -k'\frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x}, \qquad \operatorname{cn}(K-x) = k'\frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x},$$
$$\operatorname{dn}(K+x) = \frac{k'}{\operatorname{dn} x}; \qquad \operatorname{dn}(K-x) = \frac{k'}{\operatorname{dn} x}.$$

$$\operatorname{sn}(2K'\sqrt{-1}+x) = \operatorname{sn} x,$$
$$\operatorname{cn}(2K'\sqrt{-1}+x) = -\operatorname{cn} x,$$
$$\operatorname{dn}(2K'\sqrt{-1}+x) = -\operatorname{dn} x.$$

$$\operatorname{sn}(K'\sqrt{-1}+x) = \frac{1}{k\operatorname{sn} x},$$
$$\operatorname{cn}(K'\sqrt{-1}+x) = -\frac{\sqrt{-1}}{k}\frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x},$$
$$\operatorname{dn}(K'\sqrt{-1}+x) = -\sqrt{-1}\,\frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x}.$$

$$\mathcal{L}\operatorname{sn} x \text{ pour } x = K'\sqrt{-1} = \frac{1}{k},$$
$$\mathcal{L}\operatorname{cn} x \ldots\ldots\ldots\ldots = -\sqrt{-1}\,\frac{1}{k},$$
$$\mathcal{L}\operatorname{dn} x \ldots\ldots\ldots\ldots = -\sqrt{-1}.$$

$$\mathcal{L}\operatorname{sn} x \text{ pour } x = 2K+K'\sqrt{-1} = -\frac{1}{k},$$
$$\mathcal{L}\operatorname{cn} x \ldots\ldots\ldots\ldots = \sqrt{-1}\,\frac{1}{k},$$
$$\mathcal{L}\operatorname{dn} x \ldots\ldots\ldots\ldots = \sqrt{-1}.$$

EXERCICES ET NOTES.

1. Dans un triangle sphérique dont les angles sont A, B, C et es côtés a, b, c, on peut faire

$$\begin{aligned}
\sin a &= \operatorname{sn} u, & \cos a &= \operatorname{cn} u,\\
\sin b &= \operatorname{sn} v, & \cos b &= \operatorname{cn} v,\\
\sin c &= \operatorname{sn}(u+v), & \cos c &= \operatorname{cn}(u+v),\\
\sin A &= k\operatorname{sn} u, & \cos A &= \operatorname{dn} u,\\
\sin B &= k\operatorname{sn} v, & \cos B &= \operatorname{dn} v,\\
\sin C &= k\operatorname{sn}(u+v); & \cos C &= -\operatorname{dn}(u+v).
\end{aligned}$$

(GLAISHER.)

2. Appliquer le théorème de Liouville (p. 274) au développement de $\mathrm{sn}(mx+a)$ en fonction de $\mathrm{sn}\,x$ et de $\mathrm{sn}'x$.

3. Appliquer le théorème de Liouville au calcul de $\mathrm{sn}\,x$ en fonction du sinus amplitude correspondant à une période m fois plus petite.

4. Trouver les zéros et les infinis de $\mathrm{cn}\,x+\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}\,x$. (LEMONNIER, *Annales de l'École Normale*, a étudié les propriétés de cette fonction; 1873.)

5. On a, en appelant $F(\mathrm{sn}^2 x)$ et $f(\mathrm{sn}^2 x)$ des fonctions des degrés n et $n-2$ en $\mathrm{sn}^2 x$,

$$F(\mathrm{sn}^2 x)+f(\mathrm{sn}^2 x)\frac{d\,\mathrm{sn}^2 x}{dx}=C\,\frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\ldots H(x-a_n)}{\Theta^{2n}(x)},$$

C désignant une constante et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les zéros du premier membre. (HERMITE, *Notes au Traité de Lacroix*.)

6. Reconnaître si une intégrale de différentielle binôme est exprimable en termes finis, au moyen des fonctions elliptiques ou au moyen des fonctions hyperelliptiques.

7. Appliquer la méthode de Fourier au développement d'une fonction doublement périodique en série trigonométrique.

(*Voir* BRIOT et BOUQUET, *Fonctions elliptiques*.)

8. On a

$$\int_0^x \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 x\,dx}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 x}=\quad x\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)},$$

$$\int_0^x \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}^2 x}{\mathrm{dn}\,a(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 x)}=-x\,\frac{\Theta'_1(a)}{\Theta(a)}-\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)},$$

$$\int_0^x \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,dx}{\mathrm{sn}^2 a-\mathrm{sn}^2 x}=-x\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{1}{2}\log\frac{H(a+x)}{H(a-x)}.$$

(JACOBI.)

9. Si l'on a

$$f(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3,$$

l'intégrale de l'équation

$$[f(x)]^{-\frac{3}{2}}dx+[f(y)]^{-\frac{3}{2}}dy=0$$

sera

$$f(x)f(y)f(a)$$
$$= [A + B(x + y + a) + C(xy + ya + ax) + Dxya]^3,$$

a désignant une constante arbitraire

(Mac-Mahon, *Quarterly Journal;* 1883.)

10. Quelques auteurs (Weierstrass, Halphen, Hoüel, ...) ont fondé la théorie des fonctions doublement périodiques sur la considération de la fonction

$$z = \int_u^\infty \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}}$$

et de son inverse

$$u = p(z);$$

l'emploi des fonctions p est peut-être plus simple que celui des fonctions sn, cn, dn ; mais, comme la plupart des bons Mémoires sont écrits dans la notation de Jacobi, nous avons cru devoir la conserver avec M. Hermite.

(Voir *Traité des Fonctions elliptiques*, par G.-H. Halphen.)

CHAPITRE XI.

ÉTUDE DES FONCTIONS ABÉLIENNES.

I. — Préliminaires.

Dans ce Chapitre, nous allons faire une étude rapide des intégrales des fonctions algébriques d'un genre supérieur à un; ces intégrales sont ce que l'on appelle proprement des *intégrales abéliennes*.

On peut étudier les propriétés des intégrales abéliennes par les méthodes de Cauchy, ainsi que l'ont fait successivement MM. Clebsch et Gordan et, plus récemment, Briot. Toutefois, les méthodes imaginées par Riemann, élucidées et perfectionnées par MM. Neumann, Clebsch, Lüroth, nous paraissent plus simples et plus rapides (1).

Nous commencerons par exposer un mode de représentation des fonctions imaginaires inventé par Riemann, et qui servira de base à nos recherches ultérieures.

[Riemann, sa Thèse, Göttingue, 1851 (*Theorie der abelschen Functionen; — Journal de Crelle-Borchardt,* 1857) — ou ses Œuvres complètes.]

II. — Surfaces de Riemann.

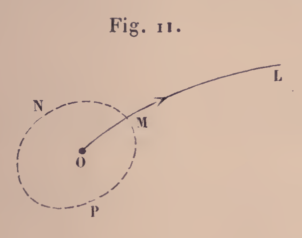
Considérons la fonction $z^{\frac{1}{m}}$: elle possède m valeurs en chaque point du plan, valeurs qui se permutent, comme l'on sait, autour de l'origine.

(1) L'emploi des surfaces de Riemann n'est pas absolument nécessaire en Analyse, mais nous croyons devoir en faire usage pour faire connaître un langage employé surtout par les géomètres allemands.

Par l'origine O faisons passer une ligne indéfinie dans un sens OL et limitée au point O, et fendons le plan sur lequel on représente les imaginaires suivant la ligne OL; traçons enfin une courbe fermée MNPM autour du point O.

Cela fait, partons du point M et faisons suivre à la variable z le contour MNPM, avec une valeur initiale u_0 de $z^{\frac{1}{m}}$; inscrivons, chemin faisant, en chaque point du contour les valeurs correspondantes de $z^{\frac{1}{m}}$, nous arriverons au point de départ M avec la valeur $u_0 e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m}}$ de $z^{\frac{1}{m}}$. Plaçons au-dessous du plan sur lequel on a représenté jusqu'ici les imaginaires un autre plan

Fig. 11.



parallèle infiniment voisin, fondons-le également suivant la projection de OL, et soudons le bord droit de la coupure OL du plan supérieur avec le bord gauche de la coupure OL du plan inférieur, puis continuons à faire cheminer le point z, non plus sur le premier plan, mais sur le second le long de la projection de MNPM sur le second plan, en continuant à inscrire, chemin faisant, les diverses valeurs de $z^{\frac{1}{m}}$; nous arriverons de nouveau en M avec la valeur $u_0 e^{2\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m}}$; plaçons au-dessous du second plan un troisième plan parallèle et infiniment voisin fendu suivant la projection de OL, en soudant le bord droit de la seconde coupure avec le bord gauche de la troisième; continuons à faire cheminer z sur le troisième plan, et ainsi de suite. Quand nous aurons parcouru la projection de MNPM sur le $m^{\text{ième}}$ plan, nous reviendrons en M

avec la valeur u_0 ; alors, soudant le bord droit de la $m^{\text{ième}}$ coupure avec le bord gauche de la première, nous repasserons sur le premier plan.

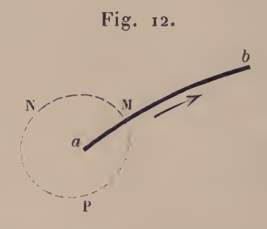
L'ensemble des plans dont nous venons de faire usage constitue une *surface de Riemann;* en chaque point d'une pareille surface, la fonction $z^{\frac{1}{m}}$ n'a qu'une seule valeur, si l'on convient de ne jamais franchir OL en restant sur le même plan, mais de passer par les soudures comme sur un pont.

Considérons encore la fonction

$$u = \sqrt{(z-a)(z-b)};$$

joignons les points a et b par une ligne droite ou courbe et fendons le plan sur lequel on représente la variable z suivant

Fig. 12.



cette ligne ab. Si l'on décrit une courbe fermée quelconque qui ne coupe pas ab, le point z revient au point de départ avec la valeur initiale de la fonction u; il n'en est plus de même quand le contour fermé décrit par le point z coupe une fois la ligne ab.

Plaçons au-dessous du plan sur lequel on représente la variable z un second plan parallèle infiniment voisin, fendons-le suivant la projection ab, soudons le bord droit (par rapport à l'observateur regardant dans le sens de la flèche) de la coupure supérieure de ab avec le bord gauche de la coupure inférieure et *vice versa,* puis faisons parcourir à z une courbe MNPM entourant le point a; si z est parti de M avec la valeur initiale u_0 de u, il revient en M avec la valeur $-u_0$. Supposons que l'on ait inscrit en chaque point z du parcours de la variable la valeur correspondante de u; continuons à faire

cheminer z, mais sur le plan inférieur en suivant la projection de MNPM, on reviendra en M avec la valeur initiale u_0 de u; et si, chemin faisant, on a inscrit en chaque point z la valeur de u correspondante, on voit que, sur la surface ainsi constituée par nos deux plans fendus et soudés, la fonction u n'aura jamais qu'une seule valeur bien déterminée, pourvu que l'on ne fasse jamais franchir au point z la coupure ab sans le faire passer d'un plan au plan voisin. La surface dont nous venons de faire usage est encore une surface de Riemann.

Nous pourrions multiplier les exemples à l'infini, et nous montrerons, mais plus loin, que toute fonction algébrique peut être considérée comme n'ayant qu'une seule valeur en chaque point d'une surface convenablement formée de plans superposés, fendus et soudés.

III. — Propriété des fonctions qui peuvent être représentées au moyen des surfaces de Riemann.

D'une manière générale, nous appellerons *surface de Riemann* une surface formée de plans superposés parallèles et infiniment voisins; ces plans pourront être fendus suivant certaines *lignes* dites *de passage;* aucune de ces lignes ne pourra être franchie par un mobile assujetti à demeurer sur la surface, sans que ce mobile passe d'un plan à un autre. A cet effet, on pourra supposer les bords des coupures convenablement soudés, comme il a été expliqué plus haut.

En chaque point d'une pareille surface, représenté par ses coordonnées x, y ou par l'imaginaire $x+y\sqrt{-1}=z$, on pourra inscrire une valeur arbitraire fonction de x et y.

Toute fonction qui n'aura jamais qu'une dérivée relative à z sera dite *monogène;* toute fonction qui en chaque point d'une surface de Riemann n'aura jamais qu'une seule valeur sera dite *monodrome* sur cette surface.

Une fonction monodrome, monogène, finie et continue sur une portion de surface de Riemann, est dite *synectique sur cette portion de surface.*

IV. — Sur l'ordre adelphique des surfaces.

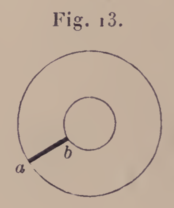
Une surface est dite *monadelphe* (¹) quand elle est partagée en deux morceaux distincts et capables d'être séparés l'un de l'autre au moyen d'une coupure allant d'un point quelconque de son contour à un autre. Toute surface fermée (comme une sphère ou un plan que nous supposons fermé à l'infini) sera censée trouée quelque part et le trou constituera un contour. A ce point de vue, le plan sur lequel on représente les imaginaires est une surface monadelphe, parce qu'une ligne quelconque indéfinie dans les deux sens le partage en deux morceaux distincts et capables de se déplacer indépendamment l'un de l'autre.

Une surface est *diadelphe,* quand on peut la transformer en surface monadelphe au moyen d'une coupure allant d'un point à un autre de son contour, sans jamais rencontrer le contour entre ces deux points.

Une surface *triadelphe* est celle qui peut être transformée en surface diadelphe au moyen d'une coupure allant d'un point à un autre de son contour, sans jamais rencontrer le contour de l'aire dans l'intervalle, etc.

Exemples. — L'aire d'une couronne circulaire est dia-

Fig. 13.



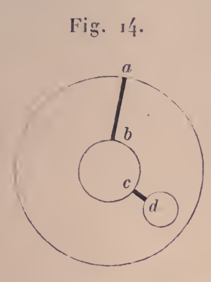
delphe, parce que l'on peut la transformer en surface monadelphe au moyen d'une droite telle que ab allant de l'un des points a de son contour à un autre b. La ligne ab, que l'on doit alors considérer comme une ouverture pratiquée dans la

(¹) *Einfach zusammen hangend,* d'après Riemann

surface, lui sert alors en quelque sorte de double contour, et il est bien clair que la nouvelle surface ainsi obtenue est monadelphe, car une coupure quelconque allant d'un point de son contour à un autre la morcelle.

Si, dans une couronne circulaire, on pratique un trou circulaire, une coupure telle que *ab* la transformera en surface diadelphe et une seconde coupure *cd* en surface mona-

Fig. 14.



delphe, car toute nouvelle coupure faite en considérant *ab* et *cd* comme des ouvertures infiniment minces morcellera la surface, etc.

Nous appellerons *section* toute coupure allant d'un point du contour de l'aire à un autre point de ce contour, sans rencontrer ailleurs les contours de l'aire; on considère, bien entendu, comme faisant partie des contours de l'aire : 1° les sections déjà pratiquées dans l'aire; 2° la section même que l'on trace. On appelle *rétrosection* (¹) une coupure qui, partant d'un point même de l'aire, revient à ce point sans avoir jamais rencontré un contour de l'aire.

Théorème I. — *Si l'on considère un ensemble* S *de surfaces monadelphes ou polyadelphes, et si l'on pratique dans ces surfaces un nombre total* μ *de sections partageant ces surfaces en surfaces monadelphes en nombre* ν, *le nombre* $\mu - \nu$ *ne dépend pas de la manière dont les sections ont été menées.*

(¹) Rückerschnitt.

En effet, faisons dans S un premier système de sections en nombre μ et un second système de sections, indépendant du premier, en nombre μ'. Supposons que le premier système fournisse ν surfaces monadelphes et le second ν'; soit k le nombre des points où le premier et le second système de sections se croisent.

Si l'on commence par mener le premier système de sections, le second système de sections rencontrera l'ancien contour de l'ensemble de nos surfaces en $2\mu'$ points (double du nombre de ces sections) et le nouveau contour formé par le premier système de sections en $2k$ points; à ces $2\mu' + 2k$ points correspondront $\mu' + k$ sections proprement dites. Si l'on avait commencé par mener le second système de sections, le premier système aurait introduit $\mu + k$ sections nouvelles.

Le nombre total des morceaux dont se composera l'ensemble de nos surfaces après l'introduction des deux systèmes de sections peut s'évaluer de deux manières : 1° il est égal au nombre des morceaux ν monadelphes fourni par le premier système de sections, augmenté du nombre $\mu' + k$ des sections introduites par le second système [1] : il est donc égal à $\nu + \mu' + k$; 2° il est aussi égal à $\nu' + \mu + k$, donc

$$\nu + \mu' + k = \nu' + \mu + k;$$

on en conclut

$$\mu' - \nu' = \mu - \nu.$$

Cette démonstration suppose les k points de rencontre des sections situés à l'intérieur de nos surfaces et non sur leur contour; mais, s'il s'en trouvait un sur leur contour, il faudrait évidemment remplacer k par $k - 1$, et nos conclusions subsisteraient entièrement.

Si l'on considère une aire monadelphe, pour cette aire $\mu - \nu$ peut s'obtenir en faisant $\mu = 1$; alors $\nu = 2$, et l'on a $\mu - \nu = -1$.

Si l'on considère une surface diadelphe, on pourra faire

---

[1] Chaque section partage une surface monadelphe en deux morceaux.

$\mu = 1$, et, comme $\nu = 1$, $\mu - \nu$ sera égal à 0; alors $\mu - \nu = 0$; pour une surface triadelphe, on aurait $\mu - \nu = 1$, etc.; donc, N étant l'ordre adelphique d'une surface, on a

$$N = \mu - \nu + 2.$$

C'est ce nombre $\mu - \nu + 2$ que nous prendrons pour la définition de l'ordre adelphique d'un système de surfaces.

Théorème II. — *Soit N l'ordre adelphique d'un système de surfaces; si l'on y pratique n sections, on les transformera en un système de surfaces d'ordre* $N - n$.

En effet, soit μ le nombre de sections qu'il faudrait faire pour transformer nos surfaces en ν morceaux monadelphes. On aura par définition

$$N = \mu - \nu + 2.$$

Si l'on pratique une section, le nouvel ordre N_1 s'évaluera en observant qu'il faudra faire $\mu - 1$ sections pour partager les surfaces en ν morceaux monadelphes; donc

$$N_1 = \mu - 1 - \nu + 2,$$

donc

$$N_1 = N - 1.$$

Si l'on pratique deux sections et si l'on appelle N_2 le nouvel ordre de nos surfaces, on aura

$$N_2 = N_1 - 1 = N - 2;$$

et ainsi de suite, ce qui démontre le théorème énoncé.

Théorème III. — *Une rétrosection ne modifie pas l'ordre adelphique d'un système de surfaces.*

En effet, soient N l'ordre d'un système de surfaces, N' ce que devient cet ordre après une rétrosection : d'un point de la rétrosection menons une coupure qui aboutisse au contour de l'aire, l'ensemble de la coupure et de la rétrosection forme une section, si bien que l'ordre N'' de notre ensemble de surfaces sera

$$N'' = N - 1;$$

mais on a aussi

$$N'' = N' - 1,$$

donc $N = N'$. C. Q. F. D.

THÉORÈME IV. — *L'ordre adelphique* N *d'une surface est égal au nombre de sections* n *qu'il faut pratiquer pour la rendre monadelphe, augmenté de un.*

En effet, l'ordre d'une surface monadelphe étant $+1$, on a $N - n = +1$ ou $N = n + 1$.

THÉORÈME V. — *L'ordre adelphique d'une surface est égal au nombre de ses contours augmenté d'un nombre pair positif ou nul.*

En effet, soient N l'ordre adelphique d'une surface, C le nombre de ses contours; toute section pratiquée dans la surface augmente ou diminue d'une unité le nombre de ses contours, suivant que ses extrémités aboutissent au même contour primitif ou à des contours différents; mais toute section diminue son ordre d'une unité.

Donc, au moyen de $N + 1$ sections, on peut rendre le nombre de ses contours égal à $C - (N + 1)(2k + 1)$, et son ordre égal à $+1$; elle sera alors monadelphe et le nombre de ses contours sera égal à un; donc

$$1 = C - (N + 1)(2k + 1)$$

ou

$$2kN + 2k + N = C;$$

C diffère donc de N d'un nombre pair. C. Q. F. D.

V. — Ordre adelphique des surfaces de Riemann.

Une surface de Riemann n'est pas nécessairement monadelphe, bien qu'elle puisse s'étendre à l'infini. En supposant qu'une pareille surface s'étende à l'infini, on la suppose

fermée [1] et contenant seulement une ouverture infiniment petite; son ordre sera donc impair; donc :

Théorème I. — *Toute surface de Riemann est d'un ordre adelphique impair, et elle devient monadelphe seulement au moyen d'un nombre de sections pair* $2p$.

Théorème II. — *Soit une surface de Riemann formée de* m *plans superposés; soient* ϖ *le nombre de ses points de ramification,* $n_1, n_2, \ldots, n_\varpi$ *les nombres de nappes qu'ils réunissent ou, si l'on veut, les ordres de ces points, l'ordre de la surface sera*

$$\sum n - \varpi - 2m + 3 = \mathrm{N},$$

et elle deviendra monadelphe au moyen de

$$\sum n - \varpi - 2m + 2 = 2p$$

sections.

En effet, prenons l'ouverture infiniment petite pour base d'un cylindre coupant toutes les nappes, nous introduirons ainsi $m-1$ rétrosections. Coupons encore la surface par un autre cylindre à base fermée infiniment petite, nous introduisons encore m rétrosections sans altérer l'ordre N de la surface ou du système de surfaces dans lesquelles nous transformons la surface de Riemann considérée. Projetons la figure sur un plan parallèle aux feuillets de la surface de Riemann : la projection se composera de deux petites courbes fermées C, C′ et les points de ramification se projetteront en ρ_1, $\rho_2, \ldots, \rho_\varpi$; menons alors ϖ lignes partageant l'aire comprise entre les courbes C, C′ en ϖ cases contenant chacune un point ρ et un seul; enfin prenons ces lignes pour bases de surfaces cylindriques droites qui couperont la surface de Riemann suivant $\mu = m\varpi$ sections.

Les rétrosections n'altérant pas l'ordre de la surface, nous

[1] Un plan peut être considéré comme une sphère de rayon infini.

n'en tiendrons pas compte. Mais toutes les coupures, sections et rétrosections étant faites, la surface de Riemann est remplacée par des morceaux détachés : le premier cylindre a détaché $m-1$ morceaux, le second en a détaché m, les autres cylindres ont détaché des morceaux dont nous allons compter le nombre. Supposons qu'il s'agisse des morceaux qui, en projection, contiennent le point ρ_i, nous aurons $m-n_i$ feuillets séparés plus n_i feuillets réunis, en tout $m-n_i+1$ morceaux; le nombre total des morceaux sera donc

$$\nu = m + m - 1 + \sum(m - n_i + 1) = (\varpi + 2)m + \varpi - 1 - \sum n.$$

Or, en vertu du théorème I du paragraphe précédent,

$$\mathrm{N} = \mu - \nu + 2;$$

donc

$$\mathrm{N} = m\varpi - (\varpi + 2)m - \varpi + 1 + \sum n + 2$$

ou

$$\mathrm{N} = \sum n - 2m - \varpi + 3. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce raisonnement tombe en défaut quand deux points de ramification viennent à se confondre ou, plus exactement, viennent à se placer l'un au-dessous de l'autre. Mais, si l'on observe que le nombre N ne change pas en tordant un peu la surface de Riemann, de manière que les points de ramification, d'abord projetés sur le même point, viennent se projeter en des points différents, on verra sans peine que les conclusions précédentes sont toujours exactes. D'ailleurs ce cas ne se présentera jamais dans ce qui va suivre.

La fonction

$$\sqrt{(x-a)(x-b)}$$

peut être représentée sur une surface d'ordre

$$2 + 2 - 2.2 - 2 + 3 = 1.$$

Nous allons maintenant nous occuper de la construction de

la surface de Riemann, sur laquelle on peut représenter une fonction algébrique donnée. Pour cela, il est nécessaire de revenir un instant sur le mode de représentation de Cauchy.

VI. — Types simples de fonctions algébriques que l'on peut se borner à considérer dans la théorie des intégrales abéliennes.

Supposons que

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

soit l'équation algébrique qui définit la fonction y, qui entre dans une intégrale abélienne. On peut toujours supposer que la courbe représentée par l'équation (1) n'a pas de points multiples à tangentes confondues; car, si elle avait de tels points, on pourrait les faire disparaître au moyen d'une série de transformations quadratiques, transformations qui remplaceront l'intégrale abélienne par une autre de même nature (p. 73).

Les points singuliers de y ne sont plus alors des points de ramification. En faisant subir à la courbe (1) une transformation homographique, on peut toujours faire en sorte que les tangentes parallèles à l'axe des x aient avec la courbe un contact du premier ordre; une pareille transformation change l'intégrale abélienne en une autre intégrale abélienne, dans laquelle la fonction algébrique y n'a que des ramifications simples, c'est-à-dire est telle que *deux* seulement de ses valeurs se permutent autour d'un même point critique; enfin, on peut toujours faire en sorte, au moyen de cette même transformation homographique, que le point à l'infini ne soit pas critique. Ainsi, une fois pour toutes, dans ce qui va suivre, nous supposerons que les fonctions algébriques que nous aurons à considérer :

1° *N'ont pas de points critiques à l'infini;*

2° *Autour de leurs divers points de ramification, deux valeurs seulement de la fonction se permutent entre elles.*

VII. — Systèmes de lacets d'un polygone.

Soit y une fonction algébrique de x qui ne présente plus que des ramifications simples et à distance finie. Soient a_1, a_2, ..., a_w ces ramifications, que nous supposons rangées dans un ordre quelconque. Appelons x_0 un point à partir duquel nous ferons varier x, et qui sera la limite inférieure des intégrales abéliennes que nous aurons à considérer.

Joignons successivement les points a_1, a_2, ..., a_w au moyen de lignes droites ou courbes, assujetties seulement à ne pas se couper, à former un polygone fermé a_1, a_2, ..., a_w que nous appellerons le *polygone* C relatif à l'arrangement a_1, a_2, ..., a_w, qui contiendra dans son intérieur le point x_0.

Formons ensuite un système de lacets ayant leur entrée et leur sortie en x_0 et leurs points critiques respectivement en a_1, a_2, ..., a_w. Nous assujettirons ces lacets (qui pourront avoir leurs bords courbes ou rectilignes) : 1° à ne pas se couper mutuellement; 2° à ne point sortir du polygone C, si ce n'est dans la partie circulaire qui entoure les points critiques. Ce système de lacets sera dit *relatif au polygone* C. Nous appellerons *lacet* a_i celui dont le point critique est a_i.

Supposons la fonction y d'ordre m et soient y_1, y_2, ..., y_m ses diverses valeurs en x_0. Si l'on part de x_0 avec la valeur initiale y_μ de y, et si l'on parcourt le lacet a_i, on reviendra en général en x_0 avec la valeur initiale de y_μ; alors le lacet a_i est dit *inactif*. Mais il peut arriver aussi que l'on revienne au point x_0 avec une valeur y_ν de y différente de y_μ, le lacet est alors *actif* et l'on dit qu'il *unit* ou *permute* les valeurs y_μ et y_ν de y; on dit aussi que le point a_i unit ou permute ces valeurs. Il va sans dire que les valeurs de y permutées par un lacet changent avec la forme affectée par les bords de ce lacet, quand les anciens et les nouveaux bords comprennent entre eux des points critiques.

√ VIII. — Lacets fondamentaux, groupes de ramifications.

Appelons y_1 une valeur quelconque de y en x_0. Cette valeur se permute avec une autre autour d'un certain lacet a_i; car, si y_1 ne se permutait avec aucune autre valeur de y, y_1 serait monodrome et l'équation algébrique définissant y ne serait pas irréductible. Soit y_2 la valeur avec laquelle se permute y_1 autour du lacet a_i; mettons de côté tous les autres lacets (s'il y en a) unissant y_1 et y_2.

Désignons par a_j un lacet unissant y_1 ou y_2 à une autre valeur y_3 de y (et il en existera une au moins, sans quoi y_1 et y_2, se permutant exclusivement, seraient racines d'une équation algébrique irréductible); mettons aussi de côté tous les autres lacets unissant y_1 ou y_2 à y_3, soit a_k un lacet unissant y_1, y_2 ou y_3 à une nouvelle valeur y_4 de y, et ainsi de suite. Les lacets a_i, a_j, a_k, ..., à l'aide desquels on peut passer de y_1 à y_m, choisis comme il vient d'être dit, forment ce que l'on appelle un système de *lacets fondamentaux*.

Nous dirons que des lacets ou des ramifications forment un *groupe*, lorsqu'ils unissent les deux mêmes valeurs de y et qu'il n'existe pas d'autres lacets ou d'autres ramifications unissant les mêmes valeurs de y. Le groupe formé des lacets qui permutent y_i et y_j sera désigné par G_{ij}.

Un groupe qui contient un lacet fondamental sera ce que nous appellerons un *groupe fondamental*.

Nous remarquerons, au sujet des lacets fondamentaux :

1° *Qu'il existe toujours un lacet fondamental permutant y_i avec une valeur de y d'indice moindre.*

Ces lacets ayant été fournis de manière à passer de y_1 à toutes les valeurs de y prenant des indices croissants.

2° *On peut toujours passer de la valeur y_p quelconque à la valeur y_q au moyen de lacets fondamentaux, à l'exclusion de tout autre lacet.*

En effet, au moyen de lacets fondamentaux, on permutera y_p successivement avec des valeurs d'indice moindre et l'on

tombera sur y_1; en parcourant ensuite la suite naturelle des lacets fondamentaux, on finira par tomber sur y_q, puisque les lacets en question sont choisis de manière à atteindre toutes les valeurs de y.

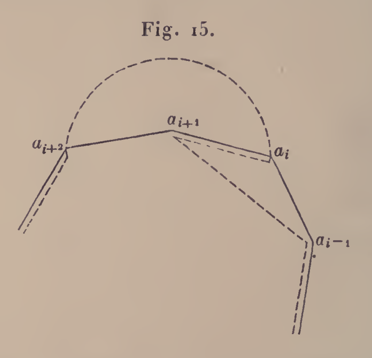
La route que nous avons suivie pour passer de y_p à y_q ne sera pas toujours la seule que l'on puisse suivre, et l'on conçoit qu'il ne soit pas nécessaire de descendre jusqu'à l'indice 1 pour atteindre l'indice q.

IX. — Effet produit par un changement de forme du polygone C.

Supposons que l'on ait formé le polygone des ramifications comme il a été expliqué au § VII, et désignons par a_1, a_2, a_3, ..., a_w ses sommets successifs qui sont les w points de ramifications de la fonction y que nous supposons toujours d'ordre m.

Chacun des lacets que l'on peut former en prenant pour

Fig. 15.



origine le point x_0 et pour point critique l'un des points a_1, a_2, ..., a_w, sans sortir du polygone C, comme il a été expliqué au § VII, permute deux valeurs bien déterminées de y, mais ces valeurs de y dépendent de la forme donnée au polygone C, ou plus exactement de l'ordre dans lequel on range ses sommets a_1, a_2, ..., a_w, parce qu'alors la forme des lacets change complètement.

C'est ce que nous nous proposons d'examiner en détail.

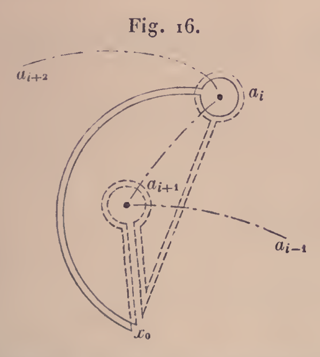
Permutons d'abord deux sommets consécutifs; à cet effet, imaginons qu'au lieu de joindre a_{i-1} à a_i on joigne a_{i-1} à a_{i+1} et qu'ensuite on joigne a_{i+1} à a_i puis à a_{i+2}, et ainsi de suite, comme auparavant. On formera un nouveau polygone C′, et à ce nouveau polygone correspondront de nouveaux lacets. Nous supposerons, une fois pour toutes, que le côté $a_{i-1}\,a_{i+1}$ est intérieur au polygone C, que $a_i a_{i+2}$ lui est extérieur; enfin $a_i a_{i+1}$ pourra lui être soit intérieur, soit extérieur, mais en tout cas x_0 sera intérieur à C′ comme à C. Dans la *fig.* 15, le polygone C est en traits pleins, C′ en traits discontinus.

Les lacets, relatifs aux points $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_w$, n'ayant pas nécessairement changé de forme, unissent toujours les mêmes racines; mais le lacet a_i a changé de forme : sa nouvelle forme dans la *fig.* 16 est tracée en traits pleins, son ancienne forme en traits discontinus, et, en déformant le nouveau lacet a_i, on voit qu'on le ramène aux anciens lacets parcourus successivement

$$a_{i+1}, \quad a_i, \quad a_{i+1};$$

les lignes composées de traits et de points sont les côtés du

Fig. 16.



polygone C′. Il résulte de là qu'en appelant α, β, γ, δ quatre entiers quelconques différents, et au plus égaux à m :

1° Si, primitivement,

a_{i+1} permutait	y_α	et	y_β,
a_i	y_γ	et	y_δ,
maintenant a_i permute	y_γ	et	y_δ;

2° Si, primitivement,

a_{i+1} permutait	y_α	et	y_β,
a_i	y_β	et	y_γ,
maintenant a_i permute	y_α	et	y_γ;

3° Si, primitivement,

a_{i+1} permutait	y_α	et	y_β,
a_i	y_α	et	y_β,
maintenant a_i permute	y_α	et	y_β;

en d'autres termes, *a_i unit les mêmes racines dans* C *et* C′, *si a_i et a_{i+1} unissaient les mêmes racines ou des racines toutes différentes. Il unirait des racines différentes dans* C *et* C′, *si, dans* C, *a_i et a_{i+1} unissaient des racines dont une seulement appartient aux deux lacets, alors a_i dans* C′ *unirait les racines non communes.*

En tout cas, un lacet qui rétrograde unit toujours les mêmes racines. C'est le lacet qui avance qui seul peut unir des racines différentes de celles qu'il unissait avant de changer de place.

X. — Théorème de M. Lüroth.

Lemme I. — *On peut toujours former le polygone des ramifications, de manière que ses sommets soient dans un ordre tel, que les lacets correspondant à ces sommets donnent lieu aux groupes successifs*

$$G_{12},\quad G_{13},\quad \ldots,\quad G_{1m},\quad G_{2,3},\quad \ldots,\quad G_{m-1,m},$$

dont quelques-uns peuvent manquer.

En effet, prenons pour premier sommet un point unissant y_1 et y_2, le polygone étant d'ailleurs formé d'une façon arbitraire; considérons alors un autre sommet unissant y_1 et y_2, faisons rétrograder ce sommet par le procédé indiqué au paragraphe précédent pour le placer le second, d'après la remarque faite dans ce paragraphe, il unira toujours y_1 et y_2.

Prenons un troisième sommet unissant y_1 et y_2, faisons-le rétrograder pour le mettre à la troisième place, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ne trouve plus de sommets nouveaux unissant y_1 à y_2. Faisons ensuite rétrograder de la même façon les sommets unissant y_1 à y_3, pour les placer à la suite de ceux qui unissent y_1 à y_2, en nous réservant de placer toujours en tête, s'il s'en forme de nouveaux, les sommets unissant y_1 et y_2; plaçons à la suite des sommets unissant y_1 à y_3 ceux qui unissent y_1 et y_4, et ainsi de suite; nous arriverons ainsi à former les groupes successifs

$$G_{12},\quad G_{13},\quad \ldots,\quad G_{1m},\quad G_{23},\quad \ldots,\quad G_{m-1,m},$$

dont quelques-uns évidemment pourront manquer.

C. Q. F. D.

Lemme II. — *Ces groupes* G_{12}, G_{13}, ... *contiennent chacun un nombre pair de lacets, et par suite le nombre total des lacets est pair.*

Pour le prouver, décrivons la série totale des lacets successivement, ce qui revient à décrire un lacet ayant le centre de son cercle à l'infini; l'infini n'étant pas critique, le point décrivant reviendra en x_0 avec la valeur initiale de y; mais, si le groupe G_{12} contenait un nombre impair de lacets en partant de x_0 avec la valeur initiale y_1, on reviendrait, après avoir parcouru le groupe G_{12}, avec la valeur y_2; les groupes G_{13}, G_{14}, ..., G_{1m} seraient inactifs, et, comme les groupes suivants ne permutent y_1 avec aucune autre valeur de y, on ne saurait, après avoir parcouru les lacets restants, revenir en x_0 avec la valeur initiale y_1 : ainsi le groupe G_{12} contient un nombre pair de lacets.

Je dis que G_{13} contient aussi un nombre pair de lacets. En effet, partons toujours avec la valeur initiale y_1 de y; on parcourt le premier lacet de G_{13} avec la valeur initiale y_1 de y, puisque G_{12} contient un nombre pair de lacets, et, si G_{13} contenait un nombre impair de lacets, on terminerait le parcours du groupe G_{13} avec la valeur y_3 de y. Les groupes

G_{14}, ..., G_{1m} seraient inactifs et les suivants ne sauraient ramener la valeur initiale y_1, leurs lacets ne permutant cette valeur avec aucune autre. G_{13} a donc un nombre pair de lacets : on verrait de même que G_{14}, G_{15}, ... ont un nombre pair de lacets.

Lemme III. — *On peut ranger les sommets du polygone des ramifications dans un ordre tel que les lacets successifs donnent lieu aux groupes* G_{12}, G_{13}, ..., $G_{m-1,m}$ *écrits dans un ordre quelconque.*

En effet, je dis qu'en permutant un lacet avec un groupe (ou, si l'on veut, un sommet avec un groupe de sommets), on ne modifie pas l'effet de ce lacet ni celui des lacets du groupe. Pour le démontrer, supposons que le lacet l permute y_i et y_j et que les lacets l', l'' permutent y_p et y_q, les chemins composés de l, l', l'' ou de l', l'', l auront le même effet que l, car l'effet de l', l'' est nul ; et, comme le nombre des lacets d'un groupe est pair, l'effet de la permutation d'un lacet avec un groupe contigu et, par suite, d'un groupe avec un groupe contigu est nul ; il en résulte que l'effet de la permutation de deux groupes quelconques est nul aussi, et que l'on peut supposer les groupes placés dans un ordre quelconque.

C. Q. F. D.

Lemme IV. — *Étant donné un groupe qui ne permute pas* y_1 *avec une autre valeur de* y, *on peut toujours remplacer son indice le plus élevé par un indice moindre.*

En effet, soit $G_{\lambda\mu}$ un groupe dans lequel on peut supposer $\mu > \lambda > 1$; parmi les groupes fondamentaux il y en a un (p. 373) permutant y_μ avec une autre valeur de y d'indice moindre y_i ; soit $G_{i\mu}$ ce groupe ; plaçons la suite des groupes dans l'ordre

$$\ldots,\quad G_{i\mu},\quad G_{\lambda\mu},\quad \ldots,$$

remplaçons le groupe $G_{i\mu}$ par une suite H de lacets permutant y_i et y_μ et par un lacet l de même nature, on pourra

remplacer l'arrangement précédent par

$$\ldots,\ \mathrm{H},\ l,\ \mathrm{G}_{\lambda\mu},\ \ldots;$$

mais, en permutant le lacet l et le groupe $\mathrm{G}_{\lambda\mu}$, on ne change pas l'effet de ce groupe et de ce lacet; l'arrangement considéré produira donc le même effet que le suivant :

$$\ldots,\ \mathrm{H},\ \mathrm{G}_{\lambda\mu},\ l,\ \ldots.$$

Faisons alors rétrograder le lacet l pour le placer successivement avant chaque lacet de $\mathrm{G}_{\lambda\mu}$, son effet ne sera pas changé; mais les lacets de $\mathrm{G}_{\lambda\mu}$ permuteront alors ι et α, et l'on aura un nouvel arrangement

$$\ldots,\ \mathrm{H},\ l,\ \mathrm{G}_{i\lambda},\ \ldots \quad \text{ou} \quad \ldots,\ \mathrm{G}_{i\mu},\ \mathrm{G}_{i\lambda},\ \ldots;$$

on a donc remplacé le groupe donné $\mathrm{G}_{\lambda\mu}$ par un autre ayant un indice commun et un indice moindre.

C. Q. F. D.

LEMME V. — *On peut supposer tous les groupes affectés de l'indice* 1.

Car un groupe peut toujours être remplacé par un autre ayant un même indice et un indice moindre, quand l'un de ses indices n'est pas l'unité.

LEMME VI. — *Si un groupe contient plus de deux lacets, on peut supprimer deux lacets dans un groupe et augmenter un autre groupe de deux lacets.*

En effet, considérons deux groupes $\mathrm{G}_{\lambda\mu}$ et G_{pq} et supposons que G_{pq} contienne plus de deux lacets; on pourra toujours passer du groupe G_{pq} au groupe $\mathrm{G}_{\lambda\mu}$, à l'aide d'autres groupes ayant en commun un indice, à savoir G_{qr}, G_{rs}, $\ldots$, $\mathrm{G}_{u\mu}$, et il suffira de prouver que l'on peut faire passer par exemple deux lacets d'un groupe G_{qr} dans un autre G_{pq} ayant un indice commun avec lui.

Décomposons G_{qr} en deux parties, l'une H_{qr} et l'autre con-

tenant deux lacets l', l''; en plaçant les groupes G_{pq}, G_{qr} l'un à côté de l'autre, on aura l'arrangement

$$\ldots,\quad H_{qr},\quad l',\quad l'',\quad G_{pq},\quad \ldots.$$

Faisons avancer les lacets l', l'' successivement, de manière à les placer après le premier lacet l de G_{pq} : au lieu de permuter y_q et y_r, ils permuteront y_p et y_r; le premier lacet l ayant rétrogradé permute toujours y_p et y_q; si on le remet à sa place, l' et l'' permuteront toujours y_p et y_r, et l permutera successivement y_q et y_r, y_p et y_q. On obtiendra ainsi l'arrangement

$$\ldots,\quad H_{qr},\quad l',\quad l'',\quad G_{pq},\quad \ldots$$

de tout à l'heure, à cela près que l' et l'' permutent y_p et y_r. Faisons maintenant passer l' et l'' avant le dernier lacet l, de H_{qr}, l permutera alors y_p et y_r, puis de nouveau y_q et y_r; enfin, remettons l' et l'' en place, de manière à obtenir de nouveau l'arrangement

$$\ldots,\quad H_{qr},\quad l',\quad l'',\quad G_{pq},\quad \ldots,$$

l et l' permuteront y_p et y_q : ils pourront alors être censés faire partie du groupe G_{pq}. En résumé, G_{qr} se réduira à un groupe H_{qr} contenant deux lacets de moins, et G_{pq} à un groupe contenant deux lacets de plus; de là découle le théorème suivant de M. Lüroth :

Théorème. — *Étant donnée une fonction algébrique y d'ordre m, on peut toujours passer d'une valeur à une autre de cette fonction, en construisant ses ϖ lacets de manière qu'ils soient distribués suivant $m-1$ groupes, le premier formé de $\varpi - 2(m-2)$ lacets permutant y_1 et y_2, les $m-2$ autres contenant chacun deux lacets permutant y_1 avec une des autres valeurs de y; ces autres racines étant les mêmes pour un même lacet et différentes pour des lacets différents.*

En effet, en vertu du lemme V, on peut supposer les lacets en groupes G_{12}, G_{13} ..., G_{1m} portant tous l'indice 1, et, en

vertu du lemme VI, on peut supposer que G_{12} contienne $w - 2(m - 2)$ lacets; G_{13}, G_{13}, ... en contenant chacun deux seulement, puisque l'on doit forcément laisser deux lacets dans chaque groupe.

Ainsi se trouve établi le théorème de M. Lüroth, qui est capital dans la théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. (*Voir* Clebsch, *Mathematische Annalen*, t. VI, et Lüroth, *id.*, t. IV).

XI. — Construction d'une surface de Riemann pour une fonction algébrique d'ordre m.

Supposons que, pour la fonction y d'ordre m, on ait construit un groupe fondamental de lacets G_{12}, G_{13}, ..., G_{1m}, le premier contenant $w - 2(m - 2)$ lacets et les autres deux lacets seulement, w désignant le nombre total des lacets, ce qui est permis d'après ce que l'on a vu tout à l'heure.

On construira une surface de Riemann de la façon suivante; on supposera m plans sur chacun desquels on attachera une valeur déterminée de y. Soient a_1, a_2, ..., a_q les points critiques unissant y_1 à y_2; on joindra $a_1 a_2$, $a_3 a_4$, $a_5 a_6$, ... Suivant ces lignes (tracées de manière à ne pas se couper), on établit des lignes de passage le long desquelles on soude les plans relatifs à y_1 et y_2. En second lieu, on établit des lignes de passage entre les plans relatifs à y_1 et y_3, à y_1 et y_4, ...; ces lignes de passage étant respectivement tracées entre les points critiques qui unissent y_1 à y_3, y_1 à y_4, ..., ces lignes étant tracées, bien entendu, de manière à ne pas se couper.

Toutes les fois que le point x chemine sans franchir une ligne de passage, il reste sur le même feuillet de la surface de Riemann, et, quand le point x revient au point de départ, il y revient avec la même valeur de y.

Toutes les fois que le point x franchit une ligne de passage, on suppose qu'il passe sur le feuillet soudé à celui qu'il vient de quitter.

Tout cela revient bien à dire que, quand le point x décrit un contour fermé enveloppant deux points critiques unissant les deux mêmes racines, il revient au point de départ avec la même valeur de y, et que, quand il contourne un point critique, il revient avec la valeur que permute ce point critique.

Appelons feuillet 1, 2, 3, ... le feuillet sur lequel on représente $y_1, y_2, y_3, \ldots$; si nous passons un couteau entre les feuillets 1 et 2, 1 et 3, ..., 1 et $i-1$, 1 et $i-2$, ..., 1 et m, et, si nous coupons les communications entre les plans, le feuillet 1 restera seulement uni au feuillet i, et il est facile de voir qu'il forme avec ce feuillet une surface monadelphe, si, bien entendu, l'on suppose que l'on ne tienne pas compte des ouvertures faites en coupant les communications; une surface de Riemann à deux feuillets et à deux ramifications étant d'un ordre adelphique égal à un.

Ceci posé, nous allons chercher à rendre la surface de Riemann monadelphe.

XII. — Système canonique des sections.

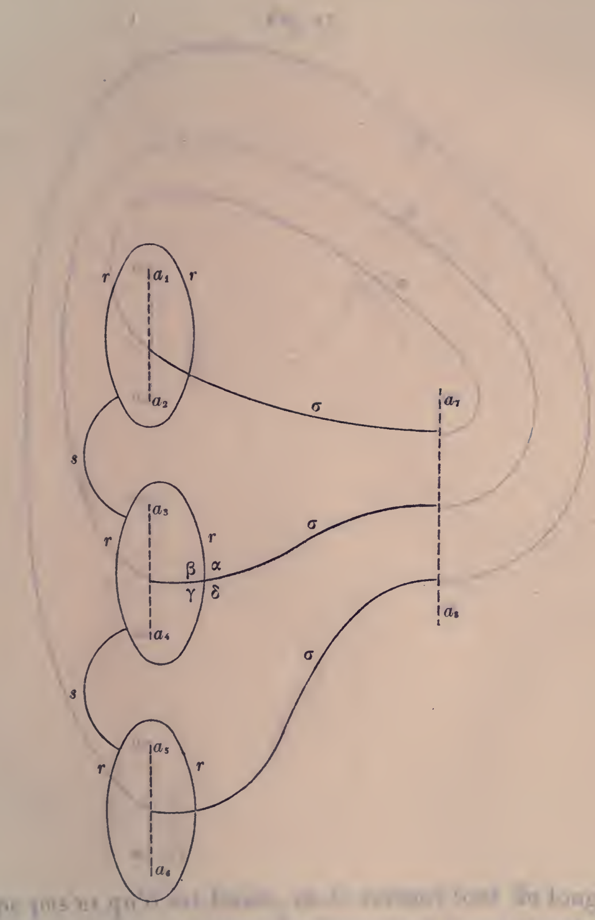
On peut rendre monadelphe la surface de Riemann considérée tout à l'heure au moyen d'un système de sections dites *canoniques*, et que l'on forme comme il suit :

Laissant de côté les points de ramification qui unissent les feuillets 3, 4, ..., m au feuillet 1, appelons $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ les points de ramification qui unissent y_1 et y_2; soient a_1a_2, a_3a_4, a_5a_6, a_7a_8 les lignes de passage correspondantes marquées en traits ---; établissons sur le feuillet n° 1 trois rétrosections r enveloppant les lignes de passage a_1a_2, a_3a_4 et a_5a_6, ces rétrosections r ont la forme elliptique (¹). Toujours sur le feuillet n° 1 traçons des sections s allant de chaque rétrosection elliptique à la suivante; enfin établissons un dernier système de sections σ allant, sur la

(¹) Le mot *elliptique* ici n'est pas employé, bien entendu, dans le sens qu'on lui attribue dans la théorie des sections coniques.

boucle n° 1 ou sur le bord $a_7 a_8$ d'une des lignes de passage $\sigma_1 \sigma_2$, $\sigma_3 \sigma_4$, $\sigma_5 \sigma_6$ à la ligne de passage $a_7 a_8$. Ce système de sections a rendu notre surface monadelphe, son contour est simple, et il est facile de constater qu'il ne se

Fig. 47.



coupe pas et qu'il est fermé, en le suivant tout du long et en découpant la figure suivant les lignes qui y sont tracées.

Le système de sections qu'il a fallu pratiquer pour rendre la surface monadelphe se compose :

1° Des rétrosections en nombre de $\frac{m}{2} - (m - 2) - 1$;

Tout cela revient bien à dire que, quand le point z décrit un contour fermé enveloppant deux points critiques [illegible] les deux mêmes racines, il revient au point de départ avec la même valeur de y_1, et que, quand il contourne un point critique, il revient avec la valeur qui permute ce point critique.

Appelons feuillet 1, 2, 3, ... le feuillet sur lequel on représente $y_1, y_2, y_3, \ldots$; si nous passons un contour entre les feuillets 1 et 2, 1 et 3, ..., 1 et $i-1$, 1 et $i+1$, ..., 1 et m, et, si nous coupons les communications entre les plans, le feuillet 1 restera seulement uni au feuillet i, et il est facile de voir qu'il forme avec ce feuillet une surface monadelphe, si, bien entendu, l'on suppose que l'on ne tienne pas compte des ouvertures faites en coupant les communications; une surface de Riemann à deux feuillets [illegible] étant d'un ordre adelphique égal à [illegible].

Ceci posé, nous allons chercher à rendre la surface de Riemann monadelphe.

[illegible]. — [illegible] des contours.

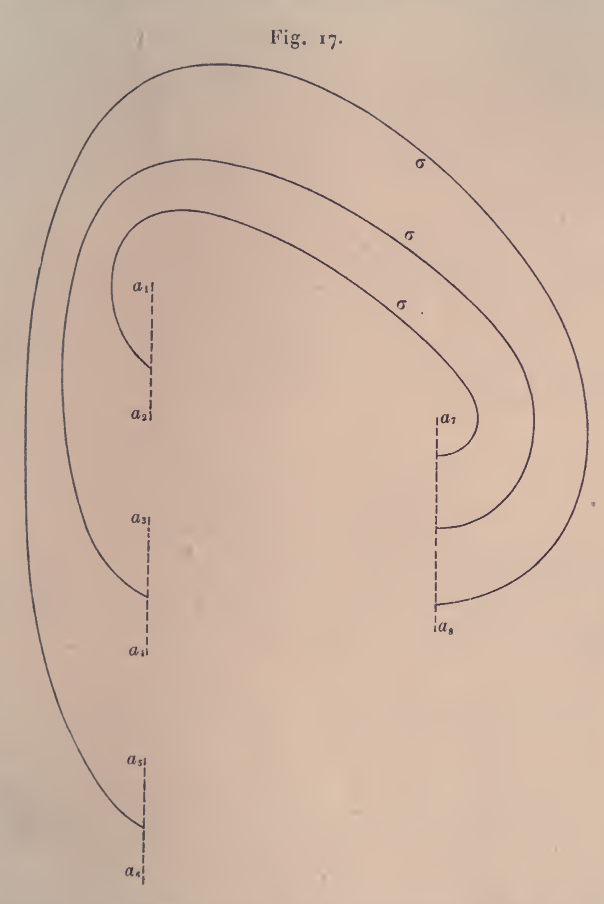
On peut rendre monadelphe la surface de Riemann considérée tout à l'heure au moyen d'un système de [illegible] dites *canoniques*, et que l'on forme comme il suit.

Laissant de côté les points de ramification [illegible] les feuillets 3, 4, ..., m au feuillet 1, appelons [illegible] a_1, a_2, a_3, a_4 les points de ramification qui [illegible] suivant a_1a_2, a_2a_3, ..., [illegible] les [illegible] correspondantes marquées en traits - - -, [illegible] sur le feuillet n° 1 trois rétrosections r enveloppant les [illegible] a_1a_2, a_3a_4 et [illegible], ces rétrosections r [illegible] elliptique [1]. Toujours sur le feuillet n° 1 [illegible] allant de chaque rétrosection elliptique à [illegible] établissons un dernier système de sections [illegible] sur la

[1] Le mot *elliptique* n'a rien [illegible] employé [illegible] pour les [illegible] dans la théorie des sections coniques.

feuille n° 1 et sur la feuille n° 2, d'une des lignes de passage $a_1 a_2$, $a_3 a_4$, $a_5 a_6$ à la ligne de passage $a_7 a_8$. Ce système de sections a rendu notre surface monadelphe, son contour est unique, et il est facile de constater qu'il ne se

Fig. 17.



coupe pas et qu'il est fermé, en le suivant tout du long et en découpant la figure suivant les lignes qui y sont tracées.

Le système de sections qu'il a fallu pratiquer pour rendre la surface monadelphe se compose :

1° Des rétrosections r au nombre de $\frac{w}{2} - (m-2) - 1$;

2° Des sections s au nombre de $\frac{\varpi}{2} - (m-2) - 2$;

3° Des sections σ au nombre de $\frac{\varpi}{2} - (m-2) - 1$.

Les rétrosections r forment avec les sections s des sections au nombre de $\frac{\varpi}{2} - (m-2) - 2$, mais la première rétrosection peut être considérée comme une section allant d'un des bords de la surface de Riemann à l'autre, ces bords étant ceux d'une ouverture infiniment petite; on a donc en tout

$$\varpi - 2(m-2) - 2$$

sections à faire. En général,

$$\varpi = m(m-1) - 2\delta,$$

δ désignant le nombre des points doubles de y; alors ce nombre des sections à faire est

$$m(m-1) - 2(m-2) - 2\delta - 2$$

ou

$$(m-1)(m-2) - 2\delta = 2p,$$

p désignant le genre de y.

On voit que le nombre des sections r est p, ainsi que le nombre des sections σ.

XIII. — Sur une propriété des fonctions algébriques.

Soit S *une surface de Riemann sur laquelle on peut représenter la fonction algébrique y définie par l'équation*

$$f(x, y) = 0$$

irréductible; toute fonction u monodrome sur cette surface S, *ne possédant pas de points essentiels, est nécessairement une fonction rationnelle de x et de y.*

Une démonstration très simple consiste à remarquer que

les fonctions u et y étant représentées sur la même surface et u étant algébrique, puisque les fonctions symétriques de ses valeurs sont rationnelles en x; y et u sont de même genre p, puisque $2p$ est pour l'une et l'autre fonction le nombre de coupures à faire pour rendre la surface S monadelphe; u est donc fonction rationnelle de x et y.

Mais, pour effacer l'impression extraordinaire que ce genre de démonstration, auquel on n'est pas habitué, peut laisser dans l'esprit, nous donnerons une autre démonstration, due à M. Briot. On peut énoncer le théorème que nous voulons démontrer comme il suit :

Étant donnée l'équation algébrique entière d'ordre m, $f(x, y) = 0$, toute fonction u de x et y qui, pour un même système de valeurs de x et y, n'admet qu'une seule valeur et qui n'a pas de points essentiels, est fonction rationnelle de x et y.

La fonction u en question est algébrique, en vertu d'un théorème connu; il reste à prouver qu'elle est fonction rationnelle de x et de y. A cet effet, désignons par $u_1, u_2, \ldots, u_m$ les valeurs de la fonction u et $y_1, y_2, \ldots, y_m$ celles de y; posons

$$\sum u_i = p_0, \qquad \sum u_i y_i = p_1,$$

$$\sum u_i y_i^2 = p_2, \qquad \ldots, \qquad \sum u_i y_i^{m-1} = p_{m-1}.$$

Les fonctions $p_0, p_1, \ldots$ sont rationnelles en x, et de ces équations du premier degré en $u_1, u_2, \ldots, u_m$ on déduira $u_1, u_2, \ldots, u_m$; on sait résoudre ces équations et l'on a symboliquement

$$u_i = \frac{f(x, p)}{p - y_i} \frac{1}{\left[\dfrac{\partial f(x, y_i)}{\partial y_i}\right]},$$

formule dans laquelle il faut remplacer, après le développe-

ment de $\frac{f(x, p)}{p - y_i}$, les exposants de p par des indices. On en conclut

$$u = \frac{f(x, p)}{p - y} : \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Telle est l'expression de la fonction u au moyen de x et y.

XIV. — Extension des théorèmes de Cauchy.

En général, une fonction u possédant les mêmes ramifications que la fonction algébrique y de x pourra être considérée comme monodrome sur la surface de Riemann propre à représenter la fonction y. Si nous la supposons monogène, finie et continue, excepté en des points isolés qui pourront être des infinis ou des points essentiels, elle jouira de propriétés analogues aux fonctions que l'on peut représenter sur le plan de Cauchy.

Une telle fonction peut toujours être regardée comme une fonction monodrome et monogène de x et de y; en effet, le raisonnement que nous avons fait au paragraphe précédent est encore applicable au cas actuel, à cela près que les quantités $p_0, p_1, p_2, \ldots$ ne sont plus des fonctions rationnelles de x, mais de simples fonctions monodromes et monogènes.

Il en résulte que, dans le voisinage d'un point de ramification a, la fonction u est susceptible de se développer suivant les puissances de $(x - a)^{\frac{1}{\mu}}$, μ désignant un entier au plus égal à m (dans le cas qui nous occupe, et où la fonction y n'a que des ramifications simples, $\mu = 2$). En posant $x - a = \zeta$, la fonction u deviendra donc monodrome par rapport à ζ dans le voisinage du point $\zeta = 0$ sur le plan de Cauchy.

Le théorème de Cauchy, en vertu duquel

« *L'intégrale d'une fonction monodrome, monogène, finie et continue à l'intérieur d'un contour* C *prise le long de ce contour est nulle* »,

est encore vrai si le contour C est tracé sur une surface de Riemann servant à représenter la fonction algébrique y; il n'y a rien à changer à la démonstration donnée plus haut pour le cas où le contour C est tracé sur un plan de Cauchy.

Les corollaires du théorème de Cauchy sont encore applicables aux fonctions monodromes sur la surface de Riemann.

Proposons-nous d'évaluer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\varphi'(z)\,dz}{\varphi(z)}$$

prise le long d'un contour fermé tracé sur une surface de Riemann, limitant une aire monadelphe C.

Si cette aire C ne contient pas de ramifications, l'intégrale sera égale à N — N', N désignant le nombre des zéros, N' le nombre des infinis de $\varphi(z)$. Supposons que l'aire C renferme des ramifications; considérons en particulier l'une d'elles a. La fonction $\varphi(z)$ est, dans le voisinage de a, une fonction monodrome et monogène de $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$, μ désignant un entier (égal à 2 dans les cas qui vont nous occuper), et $\varphi(z)$, dans le voisinage du point a, pourra se mettre sous la forme

$$(z-a)^{\frac{\nu}{\mu}}\theta(z),$$

$\theta(z)$ n'étant ni nul ni infini pour $z=a$; ainsi l'on aura

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}+\frac{\nu}{\mu}\,\frac{1}{z-a};$$

l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz,$$

prise le long d'un contour fermé autour de la ramification, sera égale à

$$\frac{\nu}{\mu}\,\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{dz}{z-a}$$

ou, en posant $z=a+\zeta^{\mu}$,

$$\frac{\nu}{\mu}\,\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{d\zeta}{\zeta}\,\mu,$$

l'intégrale étant prise cette fois sur le plan de Cauchy le long d'un contour fermé, tournant une fois autour de l'origine, ce qui donne tout simplement ν.

On peut donc dire que :

L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz$$

ou bien

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\log\varphi(z)$$

représente la quantité $\sum\nu$, ν désignant l'ordre de multiplicité d'un zéro quelconque de $\varphi(z)$ dans l'aire monadelphe le long du contour de laquelle l'intégrale est prise.

(L'ordre de multiplicité d'un zéro a de la fonction $\varphi(z)$ étant l'ordre de multiplicité de la fonction monodrome dans laquelle on la transforme en posant $z = a + \zeta^\mu$, μ désignant le nombre des valeurs de φ qui se permutent autour du point a.)

Enfin, pour l'exactitude de l'énoncé, il faut considérer les infinis comme étant des zéros d'un ordre de multiplicité négatif.

XV. — Classification des intégrales abéliennes.

Soit

$$V = \int\varphi(x, y)\,dx \tag{1}$$

une intégrale abélienne, y désignant la fonction algébrique définie par l'équation irréductible de degré m

$$f(x, y) = 0 \tag{2}$$

ou, en introduisant la variable z pour l'homogénéité,

$$f(x, y, z) = 0. \tag{3}$$

Nous ferons, pour abréger,

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_3 = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, \quad \ldots, \quad f_{33} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Effectuons une transformation homographique, et posons

$$x = \frac{a\xi + b\eta + c\zeta}{a''\xi + b''\eta + c''\zeta}, \qquad y = \frac{a'\xi + b'\eta + c'\zeta}{a''\xi + b''\eta + c''\zeta},$$

de manière que la courbe $f = 0$ n'ait pas d'asymptotes parallèles aux axes et qu'il existe un terme en η^m et un autre en ξ^m dans l'équation. Soit F ce que devient f après la transformation et Φ ce que devient φ, nous aurons

$$dx = \frac{(a\,d\xi + b\,d\eta + c\,d\zeta)(a''\xi + b''\eta + c''\zeta)}{(a''\xi + b''\eta + c''\zeta)^2} - \frac{(a''\,d\xi + b''\,d\eta + c''\,d\zeta)(a\xi + b\eta + c\zeta)}{(a''\xi + b''\eta + c''\zeta)^2};$$

en posant alors

$$A = cb'' - bc'',$$
$$B = ac'' - ca'',$$
$$C = ba'' - ab'',$$

il vient

$$dx = \frac{A(\eta\,d\zeta - \zeta\,d\eta) + B(\zeta\,d\xi - \xi\,d\zeta) + C(\xi\,d\eta - \eta\,d\xi)}{(a''\xi + b''\eta + c''\zeta)^2}.$$

Or on a

$$0 = \xi F_1 + \eta F_2 + \zeta F_3,$$
$$0 = F_1\,d\xi + F_2\,d\eta + F_3\,d\zeta$$

et, par suite,

$$\frac{\eta\,d\zeta - \zeta\,d\eta}{F_1} = \frac{\zeta\,d\xi - \xi\,d\zeta}{F_2} = \frac{\xi\,d\eta - \eta\,d\xi}{F_3};$$

si l'on désigne par ρ chacun de ces rapports, on trouve

$$dx = \frac{AF_1 + BF_2 + CF_3}{(a''\xi + b''\eta + c''\zeta)}\,\rho.$$

Or, en faisant $\zeta = 1$, $d\zeta = 0$, on voit que

$$\rho = -\frac{d\eta}{F_1} = \frac{d\xi}{F_2} = \frac{\xi\,d\eta - \eta\,d\xi}{F_3}.$$

Nous prendrons $\rho = \frac{d\xi}{F_2}$, et V prendra la forme

$$V = \int \Phi(\xi, \eta)\,\frac{AF_1 + BF_2 + CF_3}{(a''\xi + b''\eta + c''\zeta)^2}\,\frac{d\xi}{F_2}.$$

Dans cette formule, le degré de Φ est zéro, ceux de F_1, F_2, F_3 sont $m-1$; *donc on peut supposer*

$$(4) \qquad V = \int \frac{M}{N} \frac{dx}{f_2},$$

le degré de M *étant supérieur de* $m-3$ *unités à celui de* N.

Cette formule est susceptible de nouvelles réductions; appelons n le degré de N, celui de M sera $m+n-3$.

On peut, comme l'on sait, déterminer des polynômes G et H, tels que

$$Gf + HN = X,$$

X désignant un polynôme entier en X, de degré mn, et G, H des polynômes de degrés $mn-m$ et $mn-n$ respectivement en x et y; par suite, en observant que $f=0$, on a

$$N = \frac{X}{H} \quad \text{et} \quad \frac{M}{N} = \frac{HM}{X};$$

la formule (4) devient alors

$$V = \int \frac{MH}{X} \frac{dx}{f_2}.$$

Divisons MH par f et ordonnons par rapport à y, on pourra poser

$$MH = fQ + R \quad \text{ou} \quad MH = R,$$

R désignant un polynôme de degré $m-1$ en y, mais de degré $m+n-3+mn-n = mn+m-3$ en x; on a alors

$$V = \int \frac{R}{X} \frac{dx}{f_2}.$$

Divisons maintenant R par f_2, et, ordonnant toujours par rapport à y, posons

$$R = f_2 q + r;$$

r sera de degré $m-2$ en y, et l'on aura

$$V = \int \frac{q}{X} dx + \int \frac{r}{X} \frac{dx}{f_2}.$$

La première intégrale s'obtient par des procédés élémentaires; nous n'avons plus qu'à considérer la seconde

$$\Omega = \int \frac{r\,dx}{X f_2}.$$

Divisons r par X et ordonnons par rapport aux puissances de x; nous pourrons poser

$$r = QX + \Theta,$$

Q désignant un polynôme de degré

$$mn + m - 3 - mn = m - 3$$

en x et de degré $m - 2$ en y, et Θ un polynôme de degré inférieur à mn en x et de degré $m - 2$ en y. Θ peut se décomposer en éléments simples, si bien que l'intégrale Ω se décompose en d'autres de la forme

$$\int \frac{Q\,dx}{f_2} \quad \text{et} \quad \int \frac{G(y)\,dx}{(x-a)^\mu f_2},$$

Q désignant un polynôme du degré $m - 2$ en x et y (et même, si l'on veut, de degré $m - 3$ en x), G une fonction de y seul, a et μ des constantes dont la seconde est entière et positive. Nous allons étudier successivement ces deux formes.

XVI. — Intégrales de première et de seconde espèce.

Q étant un polynôme entier en x et y de degré $m - 2$,

$$V = \int \frac{Q\,dx}{f_2}$$

est une intégrale abélienne de *première* ou de *seconde* espèce, suivant qu'elle reste finie ou peut devenir infinie.

Le polynôme Q, étant de degré $m - 2$, contiendra

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

coefficients, et le nombre total des intégrales distinctes de pre-

mière et de seconde espèce sera précisément égal à ce nombre.

Or, si nous supposons : 1° que y ne soit jamais infini, même pour $x=\infty$; 2° que deux valeurs seulement de y se permutent autour d'un point critique, $\frac{Q}{f_2}$ ne deviendra pas infini, si ce n'est en un point pour lequel $f_2=0$; car le degré de f_2 est supérieur à celui de Q. Or, si $f_2=0$, deux cas peuvent se présenter :

1° Le point a, b, pour lequel $f_2=0$ est un point ordinaire où l'on n'a pas $f_1=0$; y est de la forme

$$y-b=A(x-a)^{\frac{1}{2}}+B(x-a)^{\frac{2}{2}}+\ldots,$$

A, B, ... désignant des constantes. Mais alors on a

$$f(x, y)=f_1(x-a)+\frac{1}{2}[f_{11}(x-a)^2+\ldots]+\ldots$$

et

$$f_2(x, y)=f_{12}(x-a)+f_{22}(y-b)+\ldots$$

ou bien

$$f_2(x, y)=M(x-a)^{\frac{1}{2}}+N(x-a)+\ldots,$$

M, N, ... désignant de nouvelles constantes dont la première n'est pas nulle si l'on suppose $f_{22}\gtrless 0$, c'est-à-dire si l'on suppose que deux valeurs de y se permutent autour du point a, b. $\frac{Q}{f_2}$ est alors infini, mais l'intégrale $\int\frac{Q}{f_2}\,dx$ reste finie, c'est-à-dire de *première espèce*.

2° Si nous supposons que le point (a, b) soit un point singulier, alors f_1, f_2 sont nuls tous deux; le point (a, b) n'est plus en général critique, f_2 n'est plus de l'ordre $\frac{1}{2}$, mais bien de l'ordre un. L'intégrale considérée devient infinie, elle est de *seconde espèce*.

De là résulte que :

Si la courbe $f=0$ n'a pas de points multiples, il y aura $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ intégrales de première espèce, pas d'intégrales de seconde espèce.

En général, si la courbe $f=0$ a δ points doubles, il y aura δ intégrales de seconde espèce et

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}-\delta=p$$

intégrales de première espèce. Ainsi :

Le nombre des intégrales abéliennes de première espèce auxquelles donne lieu une fonction algébrique est égal au genre de cette fonction.

Il y a donc toujours des intégrales de première espèce, car nous écartons les fonctions algébriques de genre 0, lesquelles ne fournissent pas, à proprement parler, d'intégrales abéliennes.

XVII. — Intégrales de troisième espèce.

Les intégrales de troisième espèce sont de la forme

$$\int\frac{G(y)\,dx}{(x-a)^{\mu}f_2(x,y)};$$

elles se ramènent au type

$$\int\frac{G(y)\,dx}{(x-a)f_2(x,y)},$$

au moyen de différentiations relatives à a. Nous généraliserons un peu ce type, et nous considérerons les intégrales de la forme

$$(1)\qquad \int\frac{G(x,y)\,dx}{(\alpha x+\beta y+\gamma)f_2(x,y)},$$

G désignant un polynôme entier en x et y de degré $m-2$, et $\alpha x+\beta y+\gamma$ une fonction linéaire. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_m, y_m) les coordonnées des points d'intersection de $f=0$ et $\alpha x+\beta y+\gamma=0$; par ces points, excepté par $x_1 y_1$ et $x_2 y_2$, faisons passer une courbe d'ordre $m-2$,

qui passe aussi par les points singuliers de $f=0$, nous l'assujettissons ainsi à moins de

$$m-2+\frac{(m-1)(m-2)}{2}=\frac{(m-2)(m+1)}{2}$$

conditions; et, par suite, ces conditions peuvent être remplies par une courbe d'ordre $m-2$ qui peut précisément être assujettie à $\frac{(m-2)(m+1)}{2}$ conditions.

Soit $G_{12}=0$ la courbe en question, comme $f=0$ n'est pas unicursale, G_{12} renfermera d'ailleurs au moins un paramètre arbitraire. Soit de même $G_{1i}=0$ une courbe d'ordre $m-2$ passant par les points doubles de $f=0$ et ses intersections avec $\alpha x+\beta y+\gamma=0$, excepté par x_1, y_1 et x_i, y_i, ... Considérons la courbe

$$G+\lambda_2 G_{12}+\lambda_3 G_{13}+\ldots+\lambda_m G_{1m}=0;$$

on peut déterminer les constantes λ_2, λ_3, ..., de telle sorte que cette courbe passe par $(x_2, y_2)\ldots(x_m, y_m)$; comme elle est de degré $m-2$ et qu'elle passe par $m-1$ points en ligne droite, elle se décompose en $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ et en une courbe $\Omega=0$ d'ordre $m-3$; ainsi l'on a identiquement alors

$$G+\lambda_2 G_{12}+\ldots+\lambda_m G_{1m}=\Omega(\alpha x+\beta y+\gamma)$$

ou

$$G=\Omega(\alpha x+\beta y+\gamma)-\lambda_2 G_{12}-\ldots-\lambda_m G_{1m}.$$

Si l'on porte cette valeur de G dans (1), on voit que *cette intégrale générale de troisième espèce se décomposera en une intégrale de première espèce et en d'autres de troisième espèce, telles que*

$$\int\frac{G\,dx}{(\alpha x+\beta y+\gamma)f_2},$$

n'ayant plus que deux infinis x_1 *et* x_2.

Nous allons encore préciser davantage. Appelons ξ_1, η_1, ζ_1

et ξ_2, η_2, ζ_2 les deux points où l'intégrale de troisième espèce

$$\int \frac{G(x, y)\,dx}{(\alpha x + \beta y + \gamma) f_2}$$

devient infinie; ces deux points sont situés sur la droite

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

dont nous écrirons l'équation sous la forme

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma \pm x \eta_1 \zeta_2.$$

On peut représenter un point x, y, z de cette droite par les équations

$$x = \xi_1 + t\xi_2, \qquad y = \eta_1 + t\eta_2, \qquad z = \zeta_1 + t\zeta_2,$$

et alors, en appelant $P\theta$ l'émanant $\frac{\partial \theta}{\partial \xi_1}\xi_2 + \frac{\partial \theta}{\partial \eta_1}\eta_2 + \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_1}\zeta_2$, on aura

$$f(\xi_1 + t\xi_2, \eta_1 + t\eta_2, \zeta_1 + t\zeta_2) = f + tPf + \frac{t^2}{1.2}P^2 f + \ldots.$$

En observant que $f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ et $f(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ sont nuls, l'équation aux intersections de $f = 0$ et de la droite (2) sera

$$Pf + \tfrac{1}{2}P^2 f + \ldots = 0.$$

Cette équation doit avoir les mêmes solutions que

$$G(\xi_1 + t\xi_2, \eta_1 + t\eta_2, \zeta_1 + t\zeta_2) = 0$$

ou que

$$G(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) + PG + \tfrac{1}{2}P^2 G + \ldots + G(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) = 0;$$

donc on aura

$$(3) \qquad \begin{cases} G(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = \quad Pf \quad = \xi_2 \dfrac{\partial f}{\partial \xi_1} + \eta_2 \dfrac{\partial f}{\partial \eta_1} + \zeta_2 \dfrac{\partial f}{\partial \zeta_1}, \\ G(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) = P^{m-1} f = \xi_1 \dfrac{\partial f}{\partial \xi_2} + \eta_1 \dfrac{\partial f}{\partial \eta_2} + \zeta_1 \dfrac{\partial f}{\partial \zeta_2}. \end{cases}$$

Nous prendrons dorénavant pour type de notre inté-

grale de troisième espèce l'expression

$$\int \frac{G(x, y)\,dx}{f_2(x, y)\,\Sigma \pm x\eta_1\zeta_2};$$

$G(x, y) = 0$ *sera une courbe de degré* $m-2$ *passant par tous les points singuliers de* $f = 0$ *et par* $m-2$ *des points où* $\Sigma \pm x\eta_1\zeta_2$ *rencontre* $f=0$; *les points* ξ_1, η_1, ζ_1 *et* ξ_2, η_2, ζ_2 *seront les seuls points de rencontre de* $f = 0$ *et de* $\Sigma \pm x\eta_1\zeta_2$ *par lesquels elle ne passera pas.*

On a vu que

$$(4)\qquad \begin{cases} G(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = \xi_2 \dfrac{\partial f}{\partial \xi_1} + \eta_2 \dfrac{\partial f}{\partial \eta_1} + \zeta_2 \dfrac{\partial f}{\partial \zeta_1}, \\ G(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) = \xi_1 \dfrac{\partial f}{\partial \xi_2} + \eta_1 \dfrac{\partial f}{\partial \eta_2} + \zeta_1 \dfrac{\partial f}{\partial \zeta_2}. \end{cases}$$

Calculons les résidus de la quantité placée sous le signe $\int$. Le résidu relatif à $x = \xi_1$ sera

$$(5)\qquad \frac{G(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{f_2(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)} \lim \frac{x-\xi_1}{\Sigma \pm x\eta_1\zeta_2};$$

or

$$\Sigma \pm x\eta_1\zeta_2 = (x-\xi_1)(\eta_1-\eta_2) - (y-\eta_1)(\xi_1-\xi_2)$$

et

$$y - \eta_2 = (x-\xi_1)\frac{d\eta_1}{d\xi_1} \cdots = -(x-\xi_1)\frac{\partial f}{\partial \xi_1} : \frac{\partial f}{\partial \eta_1};$$

donc

$$\Sigma \pm x\eta_1\zeta_2 = (x-\xi_1)\frac{(\eta_1-\eta_2)\dfrac{\partial f}{\partial \eta_1} + (\xi_1-\xi_2)\dfrac{\partial f}{\partial \xi_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial \eta_1}}.$$

L'expression (5) se réduit alors à

$$\frac{G(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{(\eta_1-\eta_2)\dfrac{\partial f}{\partial \eta_1} + (\xi_1-\xi_2)\dfrac{\partial f}{\partial \xi_1}},$$

c'est-à-dire à

$$\frac{G(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{\eta_1\dfrac{\partial f}{\partial \eta_1} + \xi_1\dfrac{\partial f}{\partial \xi_1} - \eta_2\dfrac{\partial f}{\partial \eta_1} - \xi_2\dfrac{\partial f}{\partial \xi_1}};$$

ajoutant et retranchant au dénominateur $\zeta_1 \frac{\partial f}{\partial \zeta_1} = \zeta_2 \frac{\partial f}{\partial \zeta_1}$, on a, en vertu de (4),

$$\frac{G(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{mf(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) - G(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)},$$

c'est-à-dire -1.

Ainsi l'intégrale de troisième espèce prise le long d'un cercle infiniment petit décrit autour de l'un de ses infinis sera $-2\pi\sqrt{-1}$ *pour le point* ξ_1 *et* $+2\pi\sqrt{-1}$ *pour le point* ξ_2.

Si la courbe $f = 0$ n'est pas unicursale, il y aura toujours au moins une intégrale abélienne de troisième espèce ayant deux infinis donnés. Ces infinis déterminent la droite

$$\alpha x + \beta y + \gamma \quad \text{ou} \quad \sum \pm x \eta_1 \zeta_2 = 0;$$

la courbe de degré $m-2$, $G = 0$ est assujettie alors à passer par les points doubles de $f = 0$ et par les $m-2$ intersections de la droite en question et de $f = 0$. Ces conditions, comme nous l'avons vu, ne la déterminent pas complètement et on peut l'assujettir encore à

$$\frac{(m-2)(m+1)}{2} - (m-2) - \delta = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \delta = p \text{ condit.}$$

XVIII. — Propriétés des intégrales de troisième espèce.

Le théorème bien connu d'Abel nous apprend que, si $\varpi = 0$ représente une courbe algébrique de degré $m+1$, ϖ_2 la dérivée de ϖ relative à y et F un polynôme de degré $m-2$, on a

$$(1) \qquad \sum \frac{F(x_i, y_i)\, dx_i}{\varpi_2(x_i, y_i)} = 0,$$

x_i et y_i désignant les intersections de $\varpi = 0$ avec une courbe algébrique quelconque $\psi = 0$. Appliquons cette formule au cas où $\int \frac{F}{\varpi}\, dx$ est une intégrale de troisième espèce aux infi-

nis ξ_1 et ξ_2; supposons alors que $F=0$ passe par les intersections de $f=0$ et $g=0$ et que

$$\varpi = fg, \qquad g = \sum \pm x\eta_1\zeta_2,$$

nous aurons

$$\varpi_2 = \frac{\partial\varpi}{\partial y} = gf_2 + fg_2,$$

et pour $x = x_i$

$$\varpi_2 = gf_2.$$

Au contraire, pour $x = x'_j$, en appelant x'_j et y'_j les intersections de $g=0$ avec $\psi = 0$, il viendra

$$\varpi_2 = fg_2;$$

(1) devient alors

$$(2) \qquad \sum \frac{F(x_i, y_i)\,dx_i}{f_2(x_i, y_i)g} + \sum \frac{F(x'_j, y'_j)\,dx'_j}{f(x'_j, y'_j)g_2} = 0.$$

Nous allons transformer la seconde somme; à cet effet, nous observerons que $F=0$ passe par les intersections de $f=0$ et $g=0$ et que g_2 est une constante numérique. Désignons pour un instant par $ax+b$ les valeurs de y tirées de $g=0$, $F(x, ax+b)$ divisera $f(x, ax+b)$, et l'on aura

$$(3) \qquad f(x, ax+b) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)F(x, ax+b)A,$$

A désignant un facteur numérique que nous déterminerons en prenant la dérivée des deux membres par rapport à x, ce qui donnera

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}a = (x-\xi_2)F(x, ax+b)A + \omega,$$

ω désignant des termes nuls pour $x=\xi_1$. Si l'on fait alors $x = \xi_1$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_1} + a\frac{\partial f}{\partial \eta_1} = (\xi_1 - \xi_2)F(\xi_1, \eta_1)A;$$

mais $F(\xi_1, \eta_1)$ est égal à $\xi_2\frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \eta_2\frac{\partial f}{\partial \eta_1} + \zeta_2\frac{\partial f}{\partial \zeta_1}$ et $a = \frac{\eta_1-\eta_2}{\xi_1-\xi_2}$, donc

$$A = \frac{\frac{\partial f}{\partial \xi_1}(\xi_1-\xi_2) + \frac{\partial f}{\partial \eta_1}(\eta_1-\eta_2)}{(\xi_1-\xi_2)^2\left(\xi_2\frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \eta_2\frac{\partial f}{\partial \eta_1} + \zeta_2\frac{\partial f}{\partial \zeta_1}\right)} = \frac{1}{(\xi_1-\zeta_2)^2};$$

d'ailleurs

$$g_2 = \xi_1 - \xi_2;$$

en vertu de (3), on aura alors

$$\sum \frac{dx'_j \, \mathrm{F}(x'_j, y'_j)}{g_2 f(x'_j, y'_j)} = \sum \frac{dx'_j (\xi_1 - \xi_2)}{(x'_j - \xi_1)(x'_j - \xi_2)}$$

et, par suite, la formule (2) deviendra

$$\sum \frac{\mathrm{F}(x_i, y_i)\, dx_i}{f_2(x_i, y_i) \Sigma \pm x_i \eta_1 \zeta_2} = \sum \frac{(\xi_2 - \xi_1)\, dx'_j}{(x'_j - \xi_1)(x_j - \xi_2)}.$$

Supposons maintenant la fonction ψ de la forme $\varphi_1 + \lambda\varphi_2$, φ_1 et φ_2 désignant des polynômes entiers de degré m à coefficients constants ; les x_i et les x'_j seront fonctions de λ et, en faisant varier λ de o à ∞, on aura

$$\sum \int \frac{\mathrm{F}(x_i, y_i)\, dx_i}{f_2(x_i, y_i) \Sigma \pm x_i \eta_1 \zeta_2} = \sum \log \left(\frac{x'_j - \zeta_1}{x'_j - \xi_2} \right)_0^\infty;$$

mais, en observant que

$$(\xi_1 - x'_1)(\xi_1 - x'_2) \ldots (\xi_1 - x'_m)$$

est, à un facteur près, égal au polynôme en ξ_1 qui a pour racines les abscisses d'intersection de $\varphi_1 + \lambda\varphi_2$ avec la droite $g = 0$, on tirera

$$\sum \int \frac{\mathrm{F}(x_i, y_i)\, dx_i}{f_2(x_i, y_i) \Sigma \pm x_i \eta_1 \zeta_2} = \log \frac{\varphi_2(\xi_1, \eta_1)\varphi_1(\xi_2, \eta_2)}{\varphi_2(\xi_2, \eta_2)\varphi_1(\xi_1, \eta_1)}.$$

Cette équation est l'expression de l'une des formes du théorème d'Abel. Elle montre que *la somme des intégrales abéliennes de troisième espèce obtenues en prenant pour limites inférieures les intersections de $f = 0$ et $\varphi_1 = 0$, et pour limites supérieures les intersections de $f = 0$ et $\varphi_2 = 0$, peut s'exprimer au moyen des logarithmes des fonctions φ_1 et φ_2 pour les valeurs des variables qui rendent infinies les intégrales de troisième espèce.*

XIX. — Sur les valeurs multiples des intégrales abéliennes de première espèce.

Soit x_0 un point déterminé du plan, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les valeurs de la fonction algébrique y en ce point; évaluons la valeur de l'intégrale abélienne de première espèce

$$V = \int_{x_0}^{x} \frac{Q(x, y)\,dx}{f_2(x, y)}.$$

A cet effet, construisons d'abord le système des lacets dont il est question dans le théorème de M. Lüroth (p. 376) $w - 2(m - 2)$ lacets permutent y_1 et y_2; les $2(m - 2)$ lacets restants se décomposent en $m - 1$ groupes de deux lacets permutant le premier groupe y_1 et $y_3, \ldots$; le $(m - 1)^{\text{ième}}$, y_1 et y_m.

Tout chemin d'intégration allant de x_0 à x se ramène à des lacets pris parmi ceux que nous venons de considérer et à un chemin déterminé $x_0 x_1$ que nous appellerons le *chemin direct*, et cela par une déformation continue qui ne lui fait franchir aucun point critique. Par conséquent, en appelant toujours $a_1, a_2, \ldots, a_w$ les points critiques et $\pm(a_1)$, $\pm(a_2), \ldots, \pm(a_w)$ les intégrales prises le long de ces lacets, la valeur la plus générale de V sera de la forme

$$V_i + \alpha,$$

$V_1, V_2, \ldots, V_m$ désignant les valeurs de V prises le long du chemin direct $x_0 x_1$ en prenant pour valeurs de y en x_0, respectivement $y_1, y_2, \ldots, y_m$ et en désignant par α une somme de termes, tels que $\pm(a_1), \pm(a_2), \ldots$. Mais cette expression $V_i + \alpha$ peut se simplifier.

Tous les lacets permutant la valeur de y_1 avec une autre, nous adopterons le signe $+$ devant (a_i) pour indiquer qu'il est parcouru avec la valeur initiale y_1 de y. Il résulte de cette convention que deux lacets actifs parcourus successivement seront affectés de signes contraires, et la valeur la plus

générale de V sera, en prenant y_1 pour valeur initiale,

$$(a_i)-(a_j)+(a_k)-\ldots+V_h, \tag{1}$$

h désignant un des nombres 1, 2, 3, ..., m.

Les différences $(a_i)-(a_j)$ peuvent s'exprimer linéairement au moyen des seules différences

$$(a_1)-(a_2),\quad (a_1)-(a_3),\quad \ldots,\quad (a_1)-(a_w),$$

que nous pouvons appeler $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_w$; en outre, on a

$$(a_i)=(a_1)-[(a_1)-(a_i)]=(a_1)-\varepsilon_i;$$

en appelant alors Σ une somme de termes de la forme ε_2, $\varepsilon_3, \ldots,$ l'expression (1) se réduira aux types

$$\Sigma+V_1,\quad \Sigma+(a_1)+V_i.$$

Nous nous attacherons surtout à l'étude du premier type et à l'évaluation de la somme Σ, que l'on appelle une *période* de l'intégrale.

Une première simplification résulte de ce que, si l'on considère un groupe G_{1i} dans lequel $i>2$, on peut faire abstraction des lacets de ce groupe dans l'évaluation d'une somme Σ. En effet, supposons qu'il entre dans cette somme une intégrale prise le long d'un lacet permutant y_1 avec y_i, nous ne pouvons revenir en x_0 pour décrire le chemin direct x_0x avec la valeur initiale y_1 qu'après avoir parcouru un second lacet permutant y_1 et y_i; si c'est le même lacet, la seconde intégrale détruira la première; si c'est l'autre lacet du groupe, je dis que la seconde intégrale détruira encore la première; en effet, partons avec la valeur initiale y_i et décrivons *successivement* les lacets des groupes *successifs*

$$G_{12},\quad G_{13},\quad \ldots,\quad G_{1i},\quad \ldots,\quad G_{1m},$$

tous les lacets seront inactifs, jusqu'à ceux du groupe G_{1i}. A la sortie du groupe G_{1i}, y aura la valeur y_i et les groupes suivants seront inactifs, mais l'intégrale totale engendrée par ce contour est équivalente à l'intégrale prise autour d'un

lacet ayant le centre de son cercle à l'infini; elle est donc nulle. L'effet des lacets de G_{1i} est donc de fournir une intégrale nulle quand on les décrit avec la valeur initiale y_i, et par suite aussi quand on les décrit avec la valeur initiale y_1; on peut donc faire abstraction de tous les groupes, excepté du groupe G_{12}, quand il s'agit d'évaluer une période Σ.

Mais alors la valeur de l'intégrale prise avec la valeur initiale y_1 le long du même contour G_{12}, G_{13}, ..., G_{1m} sera égale à zéro; or elle est aussi égale à

$$(a_1)-(a_2)+(a_3)-\ldots-(a_q),$$

q désignant le nombre des points critiques permutant y_1 et y_2; cette somme peut s'écrire

$$[(a_2)-(a_1)]+[(a_3)-(a_1)]-\ldots-[(a_q)-(a_1)].$$

Il existe donc, entre les périodes $(a_1)-(a_i)$ en fonction linéaire et à coefficients entiers desquelles on peut exprimer toutes les autres, une relation linéaire et à coefficients entiers; donc enfin les périodes Σ sont de la forme

$$m_1\omega_1+m_2\omega_2+\ldots+m_{q-2}\omega_{q-2},$$

m_1, m_2, ... désignant des entiers et ω_1, ω_2, ... des périodes particulières.

On a d'ailleurs

$$q=\varpi-2(m-2)=2p+2,$$

p désignant le genre de y, ce dont on s'assure en observant que $\varpi=m(m-1)-2\delta$ (p. 67). On a donc $q-2=2p$, et le nombre des périodes au moyen desquelles on peut exprimer Σ est $2p$.

XX. — Choix d'un système de périodes.

Nous avons vu tout à l'heure que l'on pouvait exprimer une période quelconque, linéairement, au moyen des périodes $(a_1)-(a_2)$, $(a_1)-(a_3)$, ...; mais on peut choisir les pé-

riodes en fonction desquelles on exprime toutes les autres d'une façon plus avantageuse.

Construisons la surface de Riemann relative à la fonction y, comme il a été expliqué (p. 381); pratiquons le système canonique de sections et reportons-nous à la *fig.* 17, qui représente ce système canonique.

Appelons A_i l'intégrale V prise le long de la rétrosection r qui enveloppe les points a_i et a_{i+1},

$$A_i = (a_i) - (a_{i+1}) = (a_i) - (a_1) - [(a_{i+1}) - (a_1)] :$$

A_i est une période; appelons B_i l'intégrale de V prise le long de la section σ qui traverse la ligne de passage $a_i a_{i+1}$, B_i sera également une période.

Il faut prouver que l'on a

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Sigma = &+ m_1 A_1 + m_3 A_3 + \ldots + m_{2p-1} A_{2p-1} \\ &+ n_1 B_1 + n_3 B_3 + \ldots + n_{2p-1} B_{2p-1}, \end{aligned} \right.$$

m_1, m_2, ..., n_1, n_2, ... désignant des nombres entiers. C'est ce à quoi l'on arrive en montrant qu'une période telle que $(a_1) - (a_i)$ est de la forme précédente.

Or on a

$$\begin{aligned} &A_1 = (a_1) - (a_2), \\ &A_3 = (a_3) - (a_4) = (a_1) - (a_4) - [(a_1) - (a_3)], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ou, en posant, pour abréger, $(a_1) - (a_i) = c_i$,

$$\begin{aligned} &A_1 = c_2, && B_1 = c_{2p+1}, \\ &A_3 = c_4 - c_3, && B_3 = c_{2p+1} - c_3, \\ &A_5 = c_6 - c_5, && B_5 = c_{2p+1} - c_5, \\ &\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots, \\ &A_{2p-1} = c_{2p} - c_{2p-1}, && B_{2p+1} = c_{2p+1} - c_{2p-1}. \end{aligned}$$

Celles de ces équations qui contiennent les B donnent immédiatement c_{2p+1}, c_3, c_5, ..., c_{2p-1}, les autres donnent c_2. c_4, ..., c_{2p}; les périodes $c_i = (a_1) - (a_i)$ sont donc exprimables sous la forme (1), et il en est de même d'une période quelconque Σ.

Je suppose maintenant (*fig.* 17) que le point x décrive dans le sens direct le contour de la surface de Riemann rendue monadelphe en partant du point Ω avec la valeur de y qu'il aurait s'il se rendait de x_0 en Ω sans traverser de coupure. Proposons-nous de calculer la différence des valeurs de V des deux côtés d'une même coupure; cette différence est évidemment constante, puisque dV y a des valeurs égales.

Supposons que nous soyons arrivés au point α; si, cheminant dans le sens direct, nous marchons jusqu'en β, l'accroissement subi par l'intégrale V est l'intégrale relative à la seconde section σ ou B_3 : donc la différence des valeurs de V à gauche et à droite de la seconde rétrosection r est B_3.

Supposons, en second lieu, que l'on décrive en partant de β la seconde rétrosection r, on arrivera en γ avec l'accroissement A_3 de V; donc la différence des valeurs de V à gauche et à droite de la seconde section σ est A_3.

Enfin, il est clair que V a la même valeur à gauche et à droite de la section s.

En général :

A gauche et à droite d'une section r ou σ, V *prend des valeurs qui diffèrent entre elles par la valeur de* V *pris le long de la section σ ou r qui la coupe. A gauche et à droite d'une section s,* V *a les mêmes valeurs.*

XXI. — Relations entre les périodes de deux intégrales de première espèce.

On sait que la fonction y donne lieu à p intégrales distinctes de première espèce; soient V^μ et V^ν deux quelconques d'entre elles que nous supposerons toujours engendrées avec la même valeur initiale de y et en suivant le même chemin; nous désignerons par $a_i^{(\mu)}$, $A_i^{(\mu)}$, $B_i^{(\mu)}$ les valeurs que prennent a_i, A_i, B_i quand à l'intégrale quelconque dont nous nous sommes occupés plus haut on substitue V^μ, et par $a_i^{(\nu)}$, $A_i^{(\nu)}$, $B_i^{(\nu)}$ les valeurs que prennent a_i, A_i, B_i quand à V on substi-

tue V^ν. Considérons l'intégrale

$$\int V^\mu dV^\nu = -\int V^\nu dV^\mu$$

prise tout le long du contour de la surface de Riemann rendue monadelphe, cette intégrale est nulle; on a donc

$$\text{(A)} \qquad \int V^\mu dV^\nu = 0.$$

L'intégrale en question se décompose en d'autres prises chacune deux fois, le long de chaque section, r, σ ou s, tantôt dans un sens, tantôt dans le sens contraire. Le long d'une section s, V^μ prenant des valeurs égales, les intégrales se détruisent et l'on peut faire abstraction de ces sections.

Le long de la section r qui entoure les points a_{2i-1}, a_{2i}, V^μ prend des valeurs différant de $B^{(\mu)}_{2i-1}$; cette section apporte alors à l'intégrale $\int V^\mu dV^\nu$ le contingent

$$\int B^{(\mu)}_{2i-1} dV^\nu = B^{(\mu)}_{2i-1} A^{(\nu)}_{2i-1},$$

puisque cette intégrale est prise le long de la rétrosection r en question. On verrait de la même façon que le contingent apporté par la section σ qui coupe la section r que nous venons de considérer est $-A^{(\mu)}_{2i-1} B^{(\nu)}_{2i-1}$; de sorte que l'équation (A) devient

$$(1) \qquad \sum \left[B^{(\mu)}_i A^{(\nu)}_i - A^{(\mu)}_i B^{(\nu)}_i \right] = 0,$$

la sommation étant étendue à tous les nombres impairs i depuis 1 jusqu'à $2p+1$.

Telle est la relation remarquable qui lie entre elles les périodes de deux intégrales abéliennes de première espèce, dans laquelle on peut aussi supposer les indices i égaux à 1, 2, 3, ..., p, en changeant de notation et en appelant A_1, A_2, ..., A_p, B_1, ..., B_p les intégrales prises le long des sections r et s. C'est ce que nous ferons dans la suite.

XXII. — Intégrales normales de première espèce.

Considérons p intégrales de première espèce distinctes et désignons-les par $V_1, V_2, \ldots, V_p$; formons ensuite des combinaisons linéaires et homogènes $v_1, v_2, \ldots, v_p$ de ces intégrales, à savoir

$$v_1 = \gamma_{11} V_1 + \gamma_{12} V_2 + \ldots + \gamma_{1p} V_p,$$
$$v_2 = \gamma_{21} V_1 + \gamma_{22} V_2 + \ldots + \gamma_{2p} V_p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On pourra déterminer les p^2 quantités γ_{ij}, de telle sorte que les p^2 valeurs que prennent les intégrales v le long d'une section σ aient des valeurs données; on pourra donc supposer $B_i^{(\mu)} = 0$, pour $i \gtrless \mu$ et $B_i^{(\mu)} = 2\pi\sqrt{-1}$ pour $i = \mu$: alors la relation (1) donnera

$$B_\mu^{(\mu)} A_\mu^{(\nu)} - B_\nu^{(\nu)} A_\nu^{(\mu)} = 0$$

ou, en observant que $B_\mu^{(\mu)} = B_\nu^{(\nu)} = 2\pi\sqrt{-1}$,

$$A_\mu^{(\nu)} = A_\nu^{(\mu)}.$$

Nous poserons

$$A_\mu^{(\nu)} = A_\nu^{(\mu)} = 2a_{\mu\nu};$$

les intégrales $v_1, v_2, \ldots, v_p$ auront alors pour périodes

$$\begin{array}{cccc} 2\pi\sqrt{-1}, & 0, & \ldots, & 0; \\ 0, & 2\pi\sqrt{-1}, & \ldots, & 0; \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ 0, & 0, & \ldots, & 2\pi\sqrt{-1}; \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 2a_{11}, & 2a_{12}, & \ldots, & 2a_{1p}, \\ 2a_{21}, & 2a_{22}, & \ldots, & 2a_{2p}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ 2a_{p1}, & 2a_{p2}, & \ldots, & 2a_{pp}; \end{array}$$

les intégrales $v_1, v_2, \ldots, v_p$ sont alors ce que l'on appelle les intégrales normales de première espèce.

XXIII. — Propriété remarquable des périodes normales.

La propriété que nous allons démontrer n'est pas un théorème simplement curieux; elle servira de base à tout ce qui va suivre. *Soient* $n_1, n_2, \ldots, n_p$ *des entiers quelconques,* $2a_{ij}$ *les périodes normales; la partie réelle de*

$$\psi = \sum a_{ij} n_i n_j$$

est négative.

Soient, en effet, $v_1, v_2, \ldots, v_p$ les intégrales normales de première espèce; soit

$$V = n_1 v_1 + n_2 v_2 + \ldots + n_p v_p = X + \sqrt{-1}\,Y.$$

Évaluons l'intégrale

$$\iint dx\,dy \left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) \quad \text{ou} \quad \iint dX\,dY,$$

pour toute la surface de Riemann : cette intégrale est positive; elle est égale, en vertu du théorème de Riemann qui nous a servi à établir le théorème de Cauchy sur l'intégrale d'une fonction prise le long d'un contour fermé, à

$$\iint dx\,dy \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2\right]$$

ou à celle de l'intégrale simple

$$\int Y\left(\frac{\partial X}{\partial x}\,dx + \frac{\partial X}{\partial y}\,dy\right) \quad \text{ou} \quad \int Y\,dX,$$

prise le long du contour de la surface rendue monadelphe, et à une intégrale double, nulle en vertu de la relation

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0;$$

or la valeur de l'intégrale simple qui est positive est facile à évaluer.

Si nous appelons $a_1^{(1)}$, $a_3^{(1)}$, ... les intégrales $\int dY$ prises

le long des sections r; $a_1^{(2)}$, $a_3^{(2)}$, ... les intégrales $\int dX$ prises le long des mêmes contours; $b_1^{(1)}$, $b_3^{(1)}$, ... les intégrales $\int dY$ prises le long des sections σ; $b_1^{(2)}$, $b_3^{(2)}$, ... les intégrales $\int dX$ prises le long des mêmes contours, nous trouverons, en raisonnant comme on l'a fait quand il s'est agi de trouver une relation entre les périodes des intégrales de première espèce,

$$\int Y\,dX = \sum (b_i^{(1)} a_i^{(2)} - b_i^{(2)} a_i^{(1)}).$$

Mais $a_i^{(1)} + b_i^{(1)}\sqrt{-1}$ et $a_i^{(2)} + b_i^{(2)}\sqrt{-1}$ sont les périodes de $V = X + Y\sqrt{-1}$, les $a_i^{(2)}$ sont nuls, les $b_i^{(2)}$ sont égaux à des multiples de 2π : donc

$$\int Y\,dX = -2\pi \sum a_i^{(1)} n_i;$$

mais les $a_i^{(1)}$ sont de la forme

$$(n_1 a_{j1} + n_2 a_{j2} + \ldots + u_p a_{jp}),$$

donc

$$\int Y\,dX = -2\pi \sum a_{ji} n_i n_j;$$

donc, comme $\int Y\,dX$ est essentiellement positif, il est bien démontré que la partie réelle de $\sum a_{ij} n_i n_j$ est négative.

XXIV. — Intégrales normales de troisième espèce.

On trouverait les variations de l'intégrale de troisième espèce comme on a trouvé celles de l'intégrale de première espèce; mais, outre les périodes correspondant aux points de ramification, les intégrales de troisième espèce ont encore deux périodes $2\pi\sqrt{-1}$, correspondant à leurs infinis logarithmiques.

Soit $S(\xi_1, \xi_2)$ une intégrale de troisième espèce possédant

seulement les deux infinis ξ_1 et ξ_2 ; elle contient p paramètres variables. On les déterminera comme il suit : appelons u_1, $u_2, \ldots, u_p$ p intégrales normales de première espèce et $2\alpha_1$, $2\alpha_2, \ldots, 2\alpha_p$ p périodes de S qui correspondent à ses points de ramifications ; posons

$$\Pi(\xi_1, \xi_2) = S(\xi_1, \xi_2) - \frac{\alpha_1}{\pi\sqrt{-1}} u_1 - \frac{\alpha_2}{\pi\sqrt{-1}} u_2 - \ldots - \frac{\alpha_p}{\pi\sqrt{-1}} u_p.$$

Si l'on fait varier x de manière que $u_1, u_2, \ldots, u_p$ augmentent de $2\pi\sqrt{-1}$, on voit que Π ne variera pas et, par conséquent, la fonction Π aura perdu une moitié de ses périodes ; cette intégrale Π est ce que l'on appelle une *intégrale normale* de troisième espèce.

XXV. — Relations entre les périodes de deux intégrales de troisième espèce.

Nous considérerons deux intégrales de troisième espèce $S(\xi, \xi')$, et $S(\alpha, \alpha')$ aux infinis ξ et ξ', α et α'. Les raisonnements qui nous ont permis de trouver une relation entre les périodes des intégrales de première espèce vont nous permettre de trouver une relation entre les périodes des intégrales de troisième espèce.

Nous considérerons l'intégrale

$$\int S(\xi, \xi')\, d\, S(\alpha, \alpha'),$$

et nous l'étendrons à tout le contour de la surface de Riemann rendue monadelphe ; cette intégrale ne sera pas nulle, parce que la quantité placée sous le signe $\int$ devient infinie en ξ, ξ', α et α'. Or nous avons vu (p. 396) que les résidus de $S(\xi, \xi')$ étaient $+1$ et -1 en ξ et ξ', de sorte que la valeur de notre intégrale, au lieu d'être zéro, sera

$$2\pi\sqrt{-1}\left[\int_{\xi'}^{\xi} d\, S(\alpha, \alpha') - \int_{\alpha'}^{\alpha} d\, S(\xi, \xi')\right]$$

et que, en appelant $A_1^{(\mu)}$, $A_2^{(\mu)}$, ... les intégrales $\int dS(\xi, \xi')$ prises le long des sections r, ..., on trouvera

$$2\pi\sqrt{-1}\left[\int_{\xi'}^{\xi} dS(\alpha, \alpha') - \int_{\alpha'}^{\alpha} dS(\xi, \xi')\right] = \sum\left[B_i^{(\mu)}A_i^{(\nu)} - B_i^{(\nu)}A_i^{(\mu)}\right].$$

Si l'on applique cette formule à des intégrales normales, les périodes B par exemple ayant disparu, le second membre de cette formule sera nul, et l'on aura

$$\int_{\xi'}^{\xi} d\Pi(\alpha, \alpha') = \int_{\alpha'}^{\alpha} d\Pi(\xi, \xi').$$

C'est dans cette formule que consiste le théorème dit *de l'échange du paramètre et de l'argument*. Dans une intégrale de troisième espèce les limites sont les *arguments*, les infinis sont les *paramètres*.

On trouverait d'une façon analogue une relation entre les périodes d'une intégrale abélienne et d'une intégrale de fonction rationnelle. Nous ne chercherons pas cette relation; parce qu'elle conduit au théorème que nous avons déjà trouvé par une autre voie comme cas particulier du théorème d'Abel, ou plutôt comme l'expression sous une autre forme de ce théorème qui a déjà été interprété de tant de manières.

XXVI. — Remarques au sujet du théorème d'Abel.

En général, si l'on coupe une courbe $f = 0$ de degré m par une courbe $\psi = 0$ de degré n, on obtient mn points d'intersection. Ces mn points ne peuvent pas être choisis arbitrairement (*voir* un Mémoire de Jacobi, *Crelle,* t. XV). En effet :

1° Si $n < m$, on peut se donner $\frac{n(n+3)}{2} < mn$ points d'intersection; la courbe $\psi = 0$ est déterminée par ces points et les $mn - \frac{n(n+3)}{2} = n\frac{2m-n+3}{2}$ autres points d'intersection sont déterminés.

2° Si $n \geqq m$, on ne change pas le système des intersections des courbes $f = 0$, $\psi = 0$ en substituant à la courbe $\psi = 0$ la courbe qui a pour équation

$$(1) \qquad \psi + \varphi f = 0,$$

φ désignant un polynôme de degré $n - m$. Or on peut déterminer φ de manière à faire disparaître de

$$\psi + \varphi f$$

$\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2}$ coefficients; la courbe (1) ne contiendra plus alors que

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2} - 1 = mn - \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

coefficients arbitraires. Or les courbes (1) et $\psi = 0$ déterminent les intersections de $\psi = 0$ et $f = 0$, comme nous venons de l'observer; $mn - \frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points d'intersection de $f = 0$, $\psi = 0$ étant donnés, les $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ autres sont donc déterminés.

Ces conclusions sont inexactes quand, parmi les points d'intersection donnés, se trouvent des points multiples de $f = 0$. En effet, si, parmi les points d'intersection de $f = 0$ et $\psi = 0$, il y a des points doubles de $f = 0$, ces points déterminent chacun *un* coefficient de $\psi = 0$, mais ils comptent pour *deux* parmi les mn intersections des deux courbes.

Supposons $n = m - 1$ ou $n = m - 2$; dans ces deux cas, en se donnant $\frac{n(n+3)}{2}$ points d'intersection, les autres sont au nombre de

$$mn - \frac{n(n+3)}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2},$$

comme il est facile de s'en convaincre en remplaçant dans le premier membre de cette formule n par $m - 1$ ou $m - 2$, pourvu que, parmi les points donnés, il n'y ait pas de point multiple de $f = 0$. Si, au contraire, parmi les points don-

nés, se trouvent tous les points multiples de $f=0$ que nous supposerons au nombre de δ (ou en nombre équivalent à δ points doubles ordinaires), on pourra se donner toujours $\frac{n(n+3)}{2}-\delta$ points de ψ qui seront simples pour f, plus les δ points doubles, et il ne restera plus que

$$mn-\frac{n(n+3)}{2}-\delta=\frac{(m-1)(m-2)}{2}-\delta=p$$

points d'intersection à déterminer au moyen des premiers, p désignant le genre de $f=0$.

Ainsi, en résumé, *en supposant* $n=m-1$ *ou* $n=m-2$, *on peut choisir arbitrairement* $mn-p$ *points d'intersection de* $f=0$, $\psi=0$; *les* p *autres seront déterminés.*

XXVII. — Intégration d'un système abélien.

Soit

$$\int\frac{Q_1(x,y)\,dx}{f_2(x,y)},\quad \int\frac{Q_2(x,y)\,dx}{f_2(x,y)},\quad \ldots,\quad \int\frac{Q_p(x,y)\,dx}{f_2(x,y)}$$

un système d'intégrales abéliennes normales de première espèce. En vertu du théorème d'Abel, si l'on coupe la courbe $f=0$ par la courbe $\psi=0$ algébrique, on aura, entre les coordonnées des points (x_1,y_1), ..., (x_μ,y_μ) d'intersection, les relations

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_1^\mu\frac{Q_1(x_i,y_i)\,dx_i}{f_2(x_i,y_i)}=0,\\ \displaystyle\sum_1^\mu\frac{Q_2(x_i,y_i)\,dx_i}{f_2(x_i,y_i)}=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \displaystyle\sum_1^\mu\frac{Q_p(x_i,y_i)\,dx_i}{f_2(x_i,y_i)}=0, \end{array}\right.$$

ou plutôt ces relations n'existeront qu'entre les points *variables* des intersections de $f=0$ et $\psi=0$. Supposons, pour

fixer les idées, le degré n de ψ égal à $m-2$, les intersections de f et ψ seront au nombre de $m(m-2)$; donnons-nous $\frac{n(n+3)}{2}$ ou $\frac{(m-2)(m+1)}{2}$ points d'intersection des deux courbes, parmi lesquels se trouveront les δ points doubles de $f=0$, il y aura encore

$$m(m-2)-\frac{(m-2)(m+1)}{2}-\delta$$

points d'intersection; ce nombre est égal à

$$\frac{(m-2)(m-1)}{2}-\delta=p,$$

dont la position dépendra des premiers; la différence entre ce nombre et le nombre des points donnés est

$$\frac{(m-2)(m+1)}{2}-\delta-\left[\frac{(m-2)(m-1)}{2}-\delta\right],$$

c'est-à-dire $m-2$. Ainsi le nombre des points que l'on peut choisir, abstraction faite des points doubles, excède le nombre p; on peut donc supposer que p de ces points choisis soient fixes.

En résumé, parmi les intersections des courbes $f=0$, $\psi=0$, il y a :

1° δ points doubles de $f=0$, (a);

2° p points fixes simples de $f=0$, (a);

3° $m-2$ points variables choisis arbitrairement, (x');

4° p points variables dont la position dépend de celle des précédents, (x) (en sorte que $\mu=m-2+p$).

Appelons $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les abscisses des derniers points; appelons $x_{p+1}, \ldots, x_\mu$ les abscisses des autres points variables : les équations (1) auront lieu entre les points variables.

Les équations (1) donnent lieu aux p intégrales

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{i=\mu}\int_{c_i}^{x_i}\frac{Q_1(x_i,y_i)\,dx_i}{f_2(x_i,y_i)}=0, \qquad \ldots.$$

Mais on peut remplacer ces équations transcendantes, dans

lesquelles $c_1, c_2, \ldots, c_p$ sont des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ pour $x_{p+1} = c_{p+1}, \ldots,$ par d'autres fournissant les mêmes valeurs de $x_1, x_2, \ldots$ et algébriques.

Il suffit pour cela de chercher la résultante $R = 0$ de $f = 0$, $\psi = 0$ provenant de l'élimination de y; si l'on divise R par le produit des facteurs de la forme $x - x'_i$ et $x - a_i$, x'_i et a_i désignant les coordonnées des points d'intersection variables et fixes que l'on peut choisir, le quotient

$$A_0 x^p - A_1 x^{p-1} + A_2 x^{p-2} - \ldots \pm A_p$$

sera le produit des facteurs $(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_p)$, en sorte que l'on aura

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{r} x_1 + x_2 + \ldots + x_p = \dfrac{A_1}{A_0}, \\ x_1 x_2 + \ldots + x_{p-1} x_p = \dfrac{A_2}{A_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_1 x_2 \ldots x_p = \dfrac{A_p}{A_0}; \end{array} \right.$$

et ces équations algébriques (3) feront connaître $x_1, x_2, \ldots, x_p$, aussi bien que les équations (2); elles renferment les constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_p$, qui sont les abscisses des p points d'intersection fixes de $f = 0$ et $\psi = 0$, qui sont simples pour $f = 0$.

XXVIII. — Addition et inversion.

Considérons la courbe $f = 0$ d'ordre m, et coupons-la par une courbe variable $\psi = 0$ d'ordre $m - 2$, que nous ferons passer par ses δ points doubles et par $m - 2$ autres points fixes de $f = 0$, il restera

$$m(m-2) - 2\delta - m - 2 = (m-1)(m-2) - 2\delta = 2p$$

autres points d'intersection variables, que nous appellerons $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_p, y_p)$ et $(x'_1, y'_1), (x_2, y'_2), \ldots,$

(x'_p, y'_p). Le théorème d'Abel nous apprend qu'entre ces points on aura les relations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{i=p} \frac{Q_1(x_i, y_i)}{f_2(x_i, y_i)}\, dx_i + \sum_{i=1}^{i=p} \frac{Q_1(x'_i, y'_i)}{f_2(x'_i, y'_i)}\, dx'_i = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{i=p} \frac{Q_p(x_i, y_i)}{f_2(x_i, y_i)}\, dx_i + \sum_{i=1}^{i=p} \frac{Q_p(x'_i, y'_i)}{f_2(x'_i, y'_i)}\, dx'_i = 0; \end{array}\right.$$

or, si l'on pose

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{i=p} \int_{c_i}^{x_i} \frac{Q_1(x_i, y_i)}{f_2(x_i, y_i)}\, dx_i = u_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{i=p} \int_{c_i}^{x_i} \frac{Q_p(x_i, y_i)}{f_2(x_i, y_i)}\, dx_i = u_p; \end{array}\right.$$

$$(2')\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{i=p} \int_{c_i}^{x'_i} \frac{Q_1(x'_i, y'_i)}{f_2(x'_i, y'_i)}\, dx' = v_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{i=p} \int_{c_i}^{x'_i} \frac{Q_p(x'_i, y'_i)}{f_2(x'_i, y'_i)}\, dx' = v_p, \end{array}\right.$$

on pourra supposer ces équations résolues par rapport à x_1, $x_2, \dots, x'_1, x'_2, \dots$ et poser

$$\begin{array}{lll} x_1 = \lambda_1(u_1, u_2, \dots, u_p), & x_2 = \lambda_2, & \dots, \\ x'_1 = \lambda_1(v_1, v_2, \dots, v_p), & x'_2 = \lambda_2, & \dots. \end{array}$$

Les équations (1) intégrées donnent

$$(3)\qquad u_1 + v_1 = w_1, \qquad u_2 + v_2 = w_2, \qquad \dots,$$

$w_1, w_2, \dots$ désignant des constantes que l'on peut repré-

senter ainsi

$$w_1 = \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c''_i}^{x''_i} \frac{Q_1(x''_i, y''_i)\, dx''_i}{f_2(x''_i, y''_i)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$w_p = \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c''_i}^{x''_i} \frac{Q_p(x''_i, y''_i)\, dx''_i}{f_2(x''_i, y''_i)},$$

et d'où l'on tire

$$x''_1 = \lambda_1(w_1, w_2, \dots), \qquad x''_2 = \lambda_2, \qquad \dots$$

ou bien

$$x''_1 = \lambda_1(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots), \qquad x''_2 = \lambda_2(u_1 + v_1, \dots), \qquad \dots.$$

Mais on peut remarquer que les équations (3), en vertu desquelles $u_1 + v_1$, $u_2 + v_2$, ... sont constantes, sont les intégrales de (1) et que l'on peut trouver d'une autre manière les intégrales de (1); ces intégrales sont les relations algébriques qui existent entre $x_1, x_2, \dots, x_p$ et $x'_1, x'_2, \dots, x'_p$; pour trouver ces relations, on élimine y entre $f = 0$ et $\psi = 0$: la résultante $R = 0$ a pour racines $x_1, \dots, x_p, x'_1, \dots, x'_p$, les x des δ points doubles de $f = 0$ et les $m - 2$ points fixes communs à $f = 0$ et $\psi = 0$; il sera alors facile de former l'équation qui a pour racines seulement les x_i et les x'_i. Soit

$$A_0 x^{2p} + A_1 x^{2p-1} + \dots + A_{2p} = 0$$

cette équation.

On en déduira

$$\sum x_i + \sum x'_i = -\frac{A_1}{A_0},$$

$$\sum x_i x_j + \sum x'_i x_j + \sum x'_i x'_j = \frac{A_2}{A_0},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Les quantités $\frac{A_1}{A_0}$, $\frac{A_2}{A_0}$, ... ne contiennent que les coordonnées des points fixes d'intersection de f et $\psi = 0$: ce sont donc des quantités constantes ou des fonctions de $w_1, w_2, \dots$.

Les formules précédentes donnent alors

$$\sum x_j + \sum x'_i = F_1(w_1, w_2, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou bien

$$\sum \lambda_i(u_1, u_2, \ldots) + \sum \lambda_i(v_1, v_2, \ldots) = F_1[\lambda_1(u_1+v_1, \ldots), \lambda_2, \ldots],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et ces relations sont algébriques. On voit donc qu'*il existe p relations algébriques entre*

$$\begin{array}{lll} \lambda_1(u_1, u_2, \ldots, u_p), & \lambda_2(u_1, u_2, \ldots, u_p), & \ldots, \\ \lambda_1(v_1, v_2, \ldots, v_p), & \lambda_2(v_1, v_2, \ldots, v_p), & \ldots \end{array}$$

et

$$\lambda_1(u_1+v_1, \ldots, u_p+v_p), \qquad \lambda_2(u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots), \qquad \ldots$$

qui permettent de calculer ces p dernières quantités en fonctions des $2p$ autres.

C'est en cela que consiste le théorème de l'addition des fonctions abéliennes (Hermite, *Comptes rendus*, t. XVIII, et *Journal de Liouville*, t. IX, 1re série).

XXIX. — Des fonctions Θ de plusieurs arguments.

En suivant le fil des analogies fournies par la théorie des fonctions elliptiques, on posera

$$(1) \qquad \Theta(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum\sum\ldots e^{\Sigma n_i x_i + \Sigma a_{ij} n_i n_j},$$

le signe $\sum\sum\ldots$ s'étendant aux valeurs $n_1, n_2, \ldots, n_p$ entières comprises entre $-\infty$ et $+\infty$, en supposant $a_{ij} = a_{ji}$. Si $\sum a_{ij} n_i n_j$ est une somme de p carrés négatifs, ou si seulement la partie réelle de $\sum a_{ij} n_i n_j$ se décompose en p carrés négatifs, ce que nous supposerons, la série (1) sera convergente. En effet, soient b_{ij} la partie réelle de a_{ij}, ξ_i celle

de x_i, il suffit de prouver que la série

$$\sum\sum\ldots e^{\Sigma n_i \xi_i + \Sigma b_{ij} n_i n_j}$$

est convergente; or elle l'est, en vertu d'un théorème connu de Cauchy, car l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots e^{\Sigma n_i \xi_j + \Sigma b_{ij} n_i n_j}\, dn_1\, dn_2 \ldots dn_p$$

est finie; pour s'en assurer, il suffit de prendre pour variables les racines $N_1, N_2, \ldots, N_p$ des carrés dans lesquels on peut décomposer $\sum b_{ij} n_i n_j$; cette intégrale devient alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots e^{\Sigma N_i X_i - N_1^2 - N_2^2 - \ldots}\,\frac{\partial(n_1, n_2, \ldots)}{\partial(N_1, N_2, \ldots)}\, dN_1\, dN_2 \ldots.$$

$X_1, X_2, \ldots$ désignent des fonctions linéaires de $\xi_1, \xi_2, \ldots$ et le déterminant $\frac{\partial(n_1, n_2, \ldots)}{\partial(N_1, N_2, \ldots)}$ est une constante. L'intégrale en question est donc finie, et sa valeur pourrait même être évaluée au moyen de formules connues.

Pour abréger, nous poserons

$$\sum a_{ij} n_i n_j = \psi,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n_1} = 2\psi_1, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial n_2} = 2\psi_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial n_p} = 2\psi_p,$$

$$\sum a_{ij} \nu_i \nu_j = \varpi,$$

$$\frac{\partial\varpi}{\partial\nu_1} = 2\varpi_1, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\nu_2} = 2\varpi_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\nu_p} = 2\varpi_p;$$

nous aurons alors

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots) = \sum\sum\ldots e^{\Sigma n_i x_i + \psi},$$

et l'on reconnaît immédiatement que $k_1, k_2, \ldots$ désignant

des entiers,

$$(2) \qquad \Theta(-x_1, -x_2, \ldots) = \Theta(x_1, x_2, \ldots),$$

$$(3) \quad \Theta(x_1 + 2k_1\pi\sqrt{-1}, x_2 + 2k_2\pi\sqrt{-1}, \ldots) = \Theta(x_1, x_2, \ldots),$$

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\Theta(x_1 + 2\varpi_1, x_2 + 2\varpi_2, \ldots, x_p + 2\varpi_p) \\ &\quad = \Theta(x_1, x_2, \ldots, x_p)e^{-[\Sigma\nu_i x_i + \varpi]}, \end{aligned}$$

$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ désignant des entiers quelconques. Les formules (2) et (3) sont évidentes; pour démontrer la dernière, observons que

$$\begin{aligned} &\Theta(\ldots x_i + 2\varpi_i \ldots) \\ &\quad = \sum\sum\ldots e^{\Sigma n_i x_i + 2\Sigma n_i\varpi_i + \psi(n_1, n_2, \ldots)} \\ &\quad = \sum\sum\ldots e^{\Sigma(n_i+\nu_i)x_i + \psi(n_1+\nu_1, n_2+\nu_2, \ldots) - \Sigma\nu_i x_i - \varpi}; \end{aligned}$$

or la formule (1) ne change pas quand on change n_1 en $n_1 + \nu_1$, n_2 en $n_2 + \nu_2$, ...; on a donc

$$\Theta(\ldots x_i + 2\varpi_i, \ldots) = \Theta(\ldots x_i, \ldots)e^{-\Sigma\nu_i x_i - \varpi},$$

ce qu'il fallait prouver.

La fonction Θ peut s'écrire sous la forme

$$\sum\sum\ldots e^{\Sigma(n_i+\nu_i)x_i + \psi(n_1+\nu_1, n_2+\nu_2, \ldots)}$$

ou

$$\sum\sum\ldots e^{\Sigma n_i x_i + \psi(n_1, n_2, \ldots) + \Sigma\nu_i x_i + 2\Sigma n_i\varpi_i + \varpi},$$

et aussi sous la forme

$$\sum\sum\ldots e^{-\Sigma n_i x_i + \psi(n_1 \ldots)};$$

on a donc, en prenant la demi-somme des résultats,

$$\Theta = \frac{1}{2}\sum\sum\ldots(e^{\Sigma n_i x_i + \Sigma\nu_i x_i + 2\Sigma n_i\varpi_i + \varpi} + e^{-\Sigma n_i x_i})e^{\psi}.$$

Si, quel que soit n, on a

$$\sum n_i x_i + \sum \nu_i x_i + 2\sum n_i \varpi_i + \varpi = -\sum n_i x_i + (2k+1)\pi\sqrt{-1},$$

k désignant un entier, on aura $\Theta = 0$.

Cette équation peut s'écrire

$$\sum (2n_i + \nu_i)x_i + \sum (\nu_i + 2n_i)\varpi_i = (2k+1)\pi\sqrt{-1}$$

ou bien

$$\sum (2n_i + \nu_i)(x_i + \varpi_i) = (2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Si l'on pose alors

$$x_i = -\varpi_i + N_i\pi\sqrt{-1},$$

il suffira que $\sum \nu_i N_i$ soit un nombre impair pour que $x_1, x_2, \ldots$ soit une solution de $\Theta = 0$.

XXX. — Sur une fonction d'une variable déduite des fonctions Θ.

Supposons que, dans la fonction

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum\sum \ldots e^{\Sigma n_i x_i + \psi},$$

on pose

$$x_1 = v_1 - c_1, \qquad x_2 = v_2 - c_2, \qquad \ldots, \qquad x_p = v_p - c_p,$$

$c_1, c_2, \ldots$ désignant des constantes et $v_1, v_2, \ldots, v_p$ un système de p intégrales normales de première espèce ayant pour périodes les $2a_{ij}$, nous poserons [1]

$$\theta(x) = \Theta(v_1 - c_1, v_2 - c_2, \ldots, v_p - c_p).$$

Pour une même valeur de x, $v_1 - c_1, v_2 - c_2, \ldots$ peuvent différer de multiples quelconques des périodes, en sorte que,

(1) Cela est permis puisque les parties réelles des périodes sont telles que ψ est une somme de carrés négatifs.

pour une même valeur de x, la fonction $\theta(x)$ peut prendre une infinité de valeurs de la forme

$$\theta(x) e^{-\Sigma \nu_i(v_i - c_i) - \varpi}.$$

Toutefois, la fonction $\theta(x)$ reste monodrome sur la surface de Riemann rendue monadelphe. L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\theta'(x)}{\theta(x)}\, dx = \mathrm{N},$$

prise le long du contour de la surface en question, fera connaître le nombre des racines de l'équation $\theta = 0$.

Or l'intégrale N est prise deux fois le long des sections r, s, σ, une fois à gauche, une fois à droite, et chaque fois dans des sens différents.

Or, à gauche et à droite d'une section s, les v_i ont la même valeur, les intégrales prises le long des sections s se détruisent; à gauche et à droite d'une rétrosection r, v_i prend des valeurs qui diffèrent entre elles d'une quantité B_i qui est égale à 0 ou $2\pi\sqrt{-1}$, les valeurs de $\frac{\theta'}{\theta}$ seront alors égales et les rétrosections r ne fourniront pas de termes finis à l'intégrale N. Enfin, si l'on considère l'intégrale prise le long d'une section σ, le long d'une telle section sur les deux bords opposés, v_i a des valeurs différant entre elles de $2a_{ij}$; $\frac{\theta'}{\theta}$ aura donc des valeurs respectives : $\frac{\theta'}{\theta}$ et $\frac{\theta'}{\theta} - \frac{dv_i}{dx}$; l'intégrale le long de cette section sera donc $2\pi\sqrt{-1}$ et, comme il y a p sections σ, on voit que

$$\mathrm{N} = p.$$

Ainsi la fonction θ a p zéros.

Les zéros de la fonction θ satisfont à une condition que nous allons déduire de la considération de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int v_i \frac{\theta'}{\theta}\, dx,$$

étendue tout le long du contour de la surface de Riemann

rendue monadelphe; cette intégrale, dans laquelle v_i désigne une intégrale quelconque normale de première espèce, est égale à $\Sigma v_i(x_k, y_k)$, x_k, y_k désignant l'un quelconque des zéros de $\theta(x)$.

D'autre part, pour évaluer l'intégrale en question, on peut procéder comme on l'a fait pour la précédente : le long des sections s, l'intégrale est nulle; le long des sections r, v_i prend à gauche et à droite de la section des valeurs différant de $2\pi\sqrt{-1}$, $\frac{\theta'}{\theta}$ prend alors des valeurs égales, en sorte que le long d'une seule de ces sections l'intégrale prend la valeur $\int\frac{\theta'}{\theta}\,dx$, l'intégrale étant étendue tout le long de la section. Le long d'une section σ, v_i prend sur les deux bords des valeurs différentes de $2a_{ij}$ et $\frac{\theta'}{\theta}$ des valeurs différant de $\frac{dv_i}{dx}$: l'intégrale le long d'une telle section sera donc

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left[\int(v_i+2a_{ij})\left(\frac{\theta'}{\theta}-\frac{dv_i}{dx}\right)dx-\int v_i\frac{\theta'}{\theta}\,dx\right]$$

ou

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left(2a_{ij}\int\frac{\theta'}{\theta}\,dx-2a_{ij}\int\frac{dv_i}{dx}\,dx-\int v_i\frac{dv_i}{dx}\,dx\right).$$

On peut donc écrire

$$\sum v_i(x_k, y_k)$$
$$=\int_{r_i}\frac{\theta'}{\theta}\,dx+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum\left(2a_{ij}\int_\sigma\frac{\theta'}{\theta}\,dx-2a_{ij}\int_\sigma\frac{dv_i}{dx}\,dx-\int_\sigma v_i\frac{dv_i}{dx}\,dx\right).$$

Dans cette équation, remplaçons les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_p$ par d'autres $c'_1, c'_2, \ldots, c'_p$ et retranchons les résultats; en appelant x'_k, y'_k ce que devient alors x_k, y_k, puis retranchant l'équation ainsi obtenue de la précédente, nous aurons

$$\sum[v_i(x_k, y_k)-v_i(x'_k, y'_k)]$$
$$=\int_{r_i}\frac{\theta'}{\theta}\,dx-\int_{r_i}\frac{\theta'_1}{\theta_1}\,dx+\sum\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left(\int_\sigma\frac{\theta'}{\theta}\,dx-\int_\sigma\frac{\theta'_1}{\theta_1}\,dx\right),$$

θ_1 désignant ce que devient θ quand on y met c'_1, c'_2, ... à la place de c_1, c_2, ...

Or $\int_{r_i} \frac{\theta'}{\theta} dx$ est la quantité dont varie $\log\theta(x)$ le long d'une section r_i; cette quantité est c_i, plus une quantité indépendante de c_i. Au contraire, un raisonnement analogue nous montre que $\int_{\sigma} \frac{\theta'}{\theta} dx$ est nul; donc

$$\left[\sum v_i(x_k, y_k) - c_i\right] - \left[\sum v_i(x'_k, y'_k) - c'_i\right]$$

est une constante indépendante de c_i et c'_i, et qui ne dépend que de x_0 et des coefficients de f. On peut donc poser

$$\sum v_i(x_k, y_k) - c_i = \mathrm{R}_i,$$

R_i désignant une quantité indépendante de c_i.

XXXI. — Suite des propriétés de la fonction $\theta(x)$.

On peut former une fonction θ ayant des zéros donnés.

En effet, on a vu que les zéros x_k, y_k satisfaisaient à la relation

$$\sum v_i(x_k, y_k) - c_i = \mathrm{R}_i$$

ou

$$c_i = \sum v_i(x_k, y_k) - \mathrm{R}_i;$$

formons la fonction

$$\theta(x) = \theta\left[\ldots, v_i - \sum v_i(x_k, y_k) + \mathrm{R}_i, \ldots\right].$$

Je dis qu'elle admettra les zéros donnés; en effet, appelons (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), ... ses zéros : on devra avoir

$$\sum v_i(x'_k, y'_k) - \sum v_i(x_k, y_k) + \mathrm{R}_i = \mathrm{R}_i$$

ou

$$\sum v_i(x'_k, y'_k) = \sum v_i(x_k, y_k),$$

pour $i = 1, 2, 3, \ldots, p$. Je dis que cela exige que l'on ait $x_1, y_1 = x'_1, y'_1, \ldots$; en d'autres termes, que les x'_k et y'_k sont déterminés.

En effet, coupons la courbe $f = 0$ par une courbe S d'ordre $m - 2$; faisons passer cette courbe d'ordre $m - 2$ par $m - 3 + p + \delta$ points fixes de $f = 0$ et par ses δ points doubles : c'est déterminer autant de paramètres de S; il n'en reste plus que

$$\frac{(m-2)(m+1)}{2} - (m-3) - p - \delta$$

arbitraires, ou

$$\frac{(m-2)(m+1)}{2} - (m-3) - \frac{(m-1)(m-2)}{2} = 1.$$

La courbe S coupe f en $m(m-2)$ points; sur ces points, il en a été choisi $m - 3 + p + 2\delta$: il en reste

$$m(m-2) - (m-3) - \frac{(m-1)(m-2)}{2} + \delta = p + 1$$

mobiles. Si on les appelle x_k, y_k, on a

$$\sum_{k=1}^{k=p+1} \frac{Q_i(x_k, y_k)}{f_2(x_k, y_k)} dx_k = 0,$$

en vertu d'un théorème connu d'Abel. Quand on se donne le $(p+1)^{\text{ième}}$ point x_{p+1}, y_{p+1}, tous les autres sont déterminés sans ambiguïté. Ceci revient à dire que, si l'on intègre les équations précédentes, ce qui donne

$$\sum_1^p v_i(x_k, y_k) = v_i(x_{p+1}, y_{p+1}) + \text{const.},$$

es x_k et les y_k seront bien déterminés quand on se donnera

les $\sum_1^p v_i(x_k, y_k)$. Ainsi on peut former une fonction θ avec des zéros donnés à l'avance.

Il résulte de là que, si l'on fait $x = x_1, y = y_1$, on a

$$\theta\left[\ldots, -\sum_{k=2}^{k=p} v_i(x_k, y_k) + R_i, \ldots\right] = 0$$

ou

$$(1)\qquad \theta\left[\ldots, \sum_{k=2}^{k=p} v_i(x_k, y_k) - R_i, \ldots\right] = 0.$$

On peut déterminer les constantes R_i comme il suit :

Coupons la courbe $f = 0$ par une courbe du degré $m - 3$ passant par les δ points doubles de f et par $p - 1$ autres points x_1, y_1; x_2, y_2; $\ldots$; x_{p-1}, y_{p-1}, en tout $p - 1 + 2\delta$ points d'intersection, elle coupera $f = 0$ encore en

$$m(m-3) - p + 1 - 2\delta = p - 1$$

autres points x'_1, y'_1; x'_2, y'_2; ....

Le théorème d'Abel donne

$$\sum d v_i(x_k, y_k) + \sum d v_i(x'_k, y'_k) = 0$$

ou

$$\sum v_i(x_k, y_k) + \sum v_i(x'_k, y'_k) = K_i,$$

K_i désignant une constante; on en tire

$$\theta\left[\ldots \sum_1^{p-1} v_i(x_k, y_k) - R_i \ldots\right] = \theta\left[\ldots \sum_1^{p-1} (x'_k, y'_k) - K_i + R_i \ldots\right].$$

Or le premier membre est nul d'après ce qu'on vient de voir (1); donc le second l'est aussi, donc $K_i - R_i$ doit être égal à R_i ou $K_i = 2R_i$.

La constante K_i est plus facile à déterminer que R_i; on

pourra donc à l'occasion substituer le calcul de K_i à celui de R_i.

Nous donnerons une dernière propriété de la fonction θ qui doit nous conduire à la solution du problème de l'inversion, but final que nous nous proposons.

Soient ξ_h, η_h les intersections d'une courbe $\varphi = 0$ du degré n avec $f = 0$; ξ'_h, η'_h les intersections d'une autre courbe $\psi = 0$ du même degré n avec $f = 0$. Le produit

$$(2) \quad \zeta = \prod_{h=1}^{h=mn} \frac{\Theta\left[\ldots, \sum_{k=1}^{k=p} v_i(x_k, y_k) - v_i(\xi'_h, \eta'_h) - R_i, \ldots\right]}{\Theta\left[\ldots, \sum_{k=1}^{k=p} v_i(x_k, y_k) - v_i(\xi_h, \eta_h) - R_i, \ldots\right]}$$

s'exprime rationnellement en x_k et y_k.

En effet, considérons d'abord ζ comme fonction de x_1, en laissant $x_2, x_3, \ldots, x_p$ constants; quand les fonctions $v_i(x_1, y_1)$ augmentent de multiples des périodes, la fonction ζ se trouve multipliée par une puissance du nombre e dont l'exposant est de la forme

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{h=1}^{h=mn} \nu_i[v_i(\xi'_h, \eta'_h) - v_i(\xi_h, \eta_h)].$$

Or, si l'on coupe la courbe $f = 0$ par la courbe $\varphi + \lambda\psi = 0$, en vertu du théorème d'Abel, les points d'intersection satisferont aux équations différentielles

$$\sum_{k=1}^{k=p} dv_i(x_k, y_k) = 0;$$

si l'on fait varier λ de 0 à ∞ en intégrant, on a précisément

$$\sum [v_i(\xi_h, \eta_h) - v_i(\xi'_h, \eta'_h)] = 0;$$

l'expression (3) est nulle et la fonction ζ conserve la même

valeur en un même point de la surface de Riemann qui représente y; donc elle s'exprime rationnellement en x_1 et y_1. On verrait de même qu'elle est rationnelle en x_2 et y_2, x_3 et y_3, ...

Cherchons les zéros et les infinis de ζ : à cet effet, cherchons les zéros de

$$(4) \qquad \Theta\left[\ldots, \sum_{k=1}^{k=p} v_i(x_k, y_k) - v_i(\xi_h, \eta_h) - R_i, \ldots\right],$$

ou, en observant que, en appelant $x'_2, y'_2, \ldots, x'_p, y'_p$ les points où une courbe de degré $m-3$, passant par les points doubles de f et les points $x_2, y_2, \ldots, x_p, y_p$, rencontre encore $f=0$, on a

$$\sum_{k=2}^{k=p} v_i(x_k, y_k) = \sum_{k=2}^{k=p} v_i(x'_k, y'_k) = 2R_i,$$

la fonction (4) devient alors

$$\Theta\left[\ldots, v_i(x_1, y_1) - \sum_{k=1}^{k=p} v_i(x'_k, y'_k) - v_i(\xi_h, \eta_h) + R_i, \ldots\right].$$

Elle admet les zéros ξ_h, η_h et x'_k, y'_k : le quotient

$$\frac{\Theta\left[\ldots, \sum v_i(x_k, y_k) - v_i(\xi'_h, \eta'_h) - R_i, \ldots\right]}{\Theta\left[\ldots, \sum v_i(x_k, y_k) - v_i(\xi_h, \eta_h) - R_i, \ldots\right]}$$

admet donc le seul zéro ξ'_h, η'_h et le seul infini ξ_h, η_h; donc ζ, considéré comme fonction de x_1 et y_1, admet les zéros ξ'_1, $\eta'_1, \ldots, \xi'_{mn}, \eta'_{mn}$ et les infinis $\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_{mn}, \eta_{mn}$; la fonction $\frac{\varphi(x_1, y_1)}{\psi(x_1, y_1)}$ admet les mêmes zéros et les mêmes infinis. Le rapport $\zeta \frac{\varphi(x_1, y_1)}{\psi(x_1, y_1)}$ est donc indépendant de x_1 et y_1, puisqu'il ne s'annule plus et ne devient plus infini : le rapport

$\zeta \frac{\varphi(x_2, y_2)}{\psi(x_2, y_2)}$ est indépendant de x_2 et y_2, ...; on peut donc poser

$$\zeta = A \prod_{k=1}^{k=p} \frac{\varphi(x_k, y_k)}{\psi(x_k, y_k)},$$

A étant indépendant des x_k et des y_k; on déterminera A en faisant $x = x_0$ et en annulant les $v_i(x_k, y_k)$, ce qui donne

$$A = \prod_{h=}^{h=mn} \frac{\Theta[\ldots, v_i(\xi'_h, \eta'_h) + R_i, \ldots]}{\Theta[\ldots, v_i(\xi_h, \eta_h) + R_i, \ldots]} \left[\frac{\psi(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)}\right]^p.$$

XXXII. — Problème de l'inversion.

Le problème de l'inversion formulé par Jacobi consiste dans l'intégration des formules

$$du_1 = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{Q_1(x_k, y_k)\,dx_k}{f_2(x_k, y_k)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$du_p = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{Q_p(x_k, y_k)\,dx_k}{f_2(x_k, y_k)}$$

sous une forme donnant les x en fonction des u. Si l'on veut, le problème de Jacobi consiste à résoudre les équations

$$(1) \quad \begin{cases} u_1 = \sum_1^p v_1(x_k, y_k), \\ u_2 = \sum v_2(x_k, y_k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_p = \sum v_p(x_k, y_k), \end{cases}$$

dont le déterminant est

$$\frac{1}{\Pi f_2(x_k, y_k)} \sum \pm Q_1(x_1, y_1) \ldots Q_p(x_p, y_p).$$

Pour résoudre ce problème, nous partirons de la formule (2) du paragraphe précédent, que nous écrirons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &A\prod_{k=1}^{k=p}\frac{\varphi(x_k, y_k)}{\psi(x_k, y_k)}\\ &\quad = \prod_{h=1}^{h=mn}\frac{\Theta\left[\ldots, \sum_{k=1}^{k=p} v_i(x_k, y_k) - v_i(\xi'_h, \eta'_h) - R_i, \ldots\right]}{\Theta\left[\ldots, \sum_{k=1}^{k=p} v_i(x_k, y_k) - v_i(\xi_h, \eta_h) - R_i, \ldots\right]},\\ &A = \prod_{h=1}^{h=mn}\frac{\Theta[\ldots, v_i(\xi'_h, \eta'_h) + R_i, \ldots]}{\Theta[\ldots, v_i(\xi_h, \eta_h) + R_i, \ldots]}\left[\frac{\psi(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)}\right]^p. \end{aligned}\right.$$

En vertu des formules (1), ces formules (2) se simplifient et donnent

$$A\prod_{k=1}^{k=p}\frac{\varphi(x_k, y_k)}{\psi(x_k, y_k)} = \prod_{h=1}^{h=mn}\frac{\Theta[\ldots, u_i - v_i(\xi'_h, \eta'_h) - R_i, \ldots]}{\Theta[\ldots, u_i - v_i(\xi_h, \eta_h) - R_i, \ldots]}.$$

Elles font connaître des fonctions symétriques des x_k et des y_k en fonction explicite des u; elles résolvent donc le problème de l'inversion.

On dit que y_k est une fonction abélienne des u_i; plus généralement, toute fonction symétrique rationnelle des x_k et des y_k sera une fonction abélienne des quantités u.

Bien que le problème de l'inversion soit théoriquement résolu, nous entrerons encore dans quelques détails à son sujet. Au lieu de la fonction $\frac{\varphi}{\psi}$, nous considérerons la fonction $\frac{\psi + \lambda\varphi}{\psi} = 1 + \lambda\frac{\varphi}{\psi}$, où λ désigne un paramètre variable; nous formerons le produit

$$\prod_{1}^{p}\left(1 + \frac{\lambda\varphi}{\psi}\right) = \lambda^p M_0 + \lambda^{p-1}M_1 + \ldots + M_p$$

et, en donnant à λ des valeurs particulières, on pourra cal-

culer les fonctions abéliennes $M_0, M_1, \ldots, M_p$; on pourra en particulier prendre $\frac{\varphi}{\psi} = \frac{x}{x-a}$ d'abord, et $\frac{\varphi}{\psi} = \frac{y}{y-b}$, a et b désignant des constantes; pour associer les valeurs correspondantes de x et de y, on procédera comme il suit :

Imaginons que l'on ait formé l'équation admettant pour racines les p valeurs de

$$\frac{x}{x-a}, \quad \frac{x}{x-a}\,\frac{y}{y-b}, \quad \frac{x}{x-a}\left(\frac{y}{y-b}\right)^2, \quad \ldots,$$
$$\frac{x}{x-a}\left(\frac{y}{y-b}\right)^{p-1}.$$

Quand on aura calculé les $\frac{y}{y-b}$, les $\frac{x}{x-a}$ s'en déduiront.

De là résulte que x et y sont des fonctions des u qui ont p valeurs se permutant les unes dans les autres.

Signalons, en terminant, un cas singulier dans lequel les fonctions abéliennes sont indéterminées : c'est celui où le déterminant $\sum \pm Q_1(x_1, y_1) Q_2(x_2, y_2) \ldots Q_p(x_p, y_p)$ est nul identiquement.

XXXIII. — Expression d'une intégrale abélienne de troisième espèce au moyen des fonctions Θ.

Considérons la fonction ζ définie par l'équation

$$\zeta = \log \frac{\Theta\left[\ldots, v_i - \sum v_i(x_k, y_k) + R_i, \ldots\right]}{\Theta\left[\ldots, v_i - \sum v_i(x'_k, y'_k) + R_i, \ldots\right]}.$$

La fonction $\frac{d\zeta}{dx}$ ne change pas quand les v_i augmentent de multiples des périodes; $\frac{d\zeta}{dx}$ est donc une fonction monodrome sur la surface de Riemann; c'est une fonction rationnelle de x et de y : ζ est donc une intégrale abélienne. Les infinis de ζ sont donc x'_k et les x_k; si donc on suppose que

$$x_1 = \xi, \qquad y_1 = \eta, \qquad x'_1 = \xi', \qquad x'_2 = \eta'$$

et

$$x'_2 = x_2, \qquad y'_2 = y_2, \qquad \ldots, \qquad x'_p = x_p, \qquad y'_p = y_p,$$

la fonction

$$\zeta = \log \frac{\Theta\left[\ldots, v_i - v_i(\xi, \eta) - \sum_2^p v_i(x_k, y_k) + \mathrm{R}_i, \ldots\right]}{\Theta\left[\ldots, v_i - v_i(\xi', \eta') - \sum_2^p v_i(x_k, y_k) + \mathrm{R}_i, \ldots\right]}$$

sera une intégrale de troisième espèce aux infinis ξ et ξ'. Si l'on désire que la limite inférieure de l'intégrale soit x_0, on devra faire

$$\zeta = \log \frac{\Theta\left[\ldots, v_i - v_i(\xi, \eta) - \sum_2^p v_i(x_k, y_k) + \mathrm{R}_i, \ldots\right]}{\Theta\left[\ldots, v_i - v_i(\xi', \eta') - \sum_2^p v_i(x_k, y_k) + \mathrm{R}_i, \ldots\right]}$$

$$- \log \frac{\Theta\left[\ldots, v_i(\xi, \eta) - \sum_2^p v_i(x_k, y_k) + \mathrm{R}_i, \ldots\right]}{\Theta\left[\ldots, v_i(\xi', \eta') - \sum_2^p v_i(x_k, y_k) + \mathrm{R}_i, \ldots\right]}.$$

XXXIV. — Théorème de M. Picard.

Si l'équation algébrique

$$(1) \qquad f(x, y) = 0$$

est satisfaite identiquement en posant

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

φ et ψ désignant des fonctions monodromes et monogènes dans toute l'étendue du plan, cette équation est nécessairement de genre zéro ou un.

Pour démontrer ce théorème, on peut évidemment se borner à considérer le cas où la courbe représentée par l'équa-

tion (1) n'a pas d'asymptotes parallèles aux axes; en d'autres termes, si l'on appelle m son degré, on peut supposer que l'équation (1) renferme un terme en x^m et en y^m.

Soit alors

$$V = \int \frac{Q(x, y)dx}{f_2(x, y)}$$

une intégrale abélienne de première espèce, Q désignant un polynôme de degré $m - 2$. La fonction

$$\frac{dV}{dt} = \frac{Q(x, y)}{f_2(x, y)} \frac{dx}{dt}$$

sera, comme x et y, une fonction monodrome et monogène de t. Je dis que cette fonction n'a pas de pôles.

En effet, elle ne peut devenir infinie que si $\frac{dx}{dt}$ devient infini, ou que si $\frac{Q}{f_2}$ devient infini, ce qui ne peut avoir lieu qu'en un point critique de y où l'on a à la fois $f = 0$ et $f_2 = 0$. Examinons ces deux cas.

1° Si au point $t = \alpha$ on a $\frac{dx}{dt} = \infty$, on a nécessairement $x = \infty$, car la dérivée d'une fonction synectique est elle-même synectique; or, pour de très grandes valeurs de x, on a, en série convergente,

$$\frac{Q}{f_2} = \frac{A}{x^{m-1}} + \frac{B}{x^m} + \frac{C}{x^{m+1}} + \ldots,$$

A, B, C,... désignant des constantes, dont la première est différente de zéro, le terme en x^{m-1} existant certainement dans f_2. D'ailleurs, x étant infini pour $t = \alpha$, on peut poser

$$x = \frac{a}{(t-\alpha)^n} + \frac{b}{(t-\alpha)^{n+1}} + \ldots;$$

on a alors

$$\frac{Q}{f_2} = (t-\alpha)^{mn-n} \varpi(t-\alpha),$$

$\varpi(t-\alpha)$ désignant une fonction monodrome et monogène

pour $t=\alpha$; donc

$$\frac{Q}{f_2}\frac{dx}{dt}=\frac{dV}{dt}=(t-\alpha)^{mn-n-n-1}\varpi_1(t-\alpha),$$

ϖ_1 désignant une nouvelle fonction synectique autour du point α. Or m doit être supposé plus grand que 3, puisque, pour $m=3$, la courbe (1) est de genre un. Alors

$$mn-2n-1>1,$$

donc $\frac{dV}{dt}$ est fini quand $\frac{dx}{dt}=\infty$.

2° Examinons maintenant le cas où le point x est un point critique de la fonction y; appelons encore α la valeur de t pour laquelle x est un point critique a, soit b la valeur correspondante de y. On a, dans le voisinage du point $x=a$,

$$\frac{Q}{f_2}=\frac{\varpi(x)}{(x-a)^{\frac{p}{q}}},$$

p et q désignant des nombres entiers tels que

$$m>q>0,\qquad p>0,$$

et ϖ désignant une fonction finie dans le voisinage du point $x=a$; d'ailleurs on doit avoir $p<q$, puisque l'intégrale abélienne V est toujours finie. Mais, $x-a$ s'annulant pour $t=\alpha$, $x-a$ est de la forme $(t-\alpha)^n$, n désignant un entier : cet entier est au moins égal à q, y devant reprendre sa valeur quand x a tourné q fois autour du point a, et seulement quand x a tourné q fois autour de a; mais, t tournant une fois autour de α, x tourne n fois autour de a, et y a repris sa valeur : donc n est multiple de q et est au moins égal à q.

On peut donc poser

$$x-a=(t-\alpha)^{\lambda q}\varpi(t),$$

λ désignant un entier positif et ϖ une fonction finie pour $t=\alpha$. Alors

$$\frac{Q}{f_2}\frac{dx}{dt}=\frac{dV}{dt}=(t-\alpha)^{\lambda q-1-\lambda p}\varpi_1(t),$$

$\varpi_1(t)$ n'étant ni nul ni infini pour $t=\alpha$: donc $\frac{dV}{dt}$ n'est pas infini pour $t=\alpha$. C. Q. F. D.

Il résulte de là que la fonction $\frac{dV}{dt}$, ne devenant jamais infinie pour des valeurs finies de t, est synectique dans toute l'étendue du plan, excepté pour $t=\infty$, et alors la fonction V, considérée comme fonction de t, est également synectique dans toute l'étendue du plan, sauf pour $t=\infty$.

Mais l'intégrale abélienne V, quand la courbe (1) est de genre supérieur à un, peut être choisie de telle sorte qu'elle possède au moins 3 périodes, et x est une fonction triplement périodique de V : alors, en ajoutant à V des multiples des périodes, on peut obtenir des valeurs de V infiniment peu différentes pour une même valeur de x; à ces valeurs de V correspondront des valeurs de t infiniment peu différentes; t variant infiniment peu, x ne varierait donc pas, ce qui est inadmissible. Le genre de (1) ne peut donc être que un ou zéro.

XXXV. — Des fonctions de n variables possédant $2n$ systèmes de périodes simultanées.

Lorsque l'on a

$$f(x_1+\omega_1, x_2+\omega_2, \ldots, x_n+\omega_n)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

on dit que la fonction f possède les périodes simultanées ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_n$. La fonction Θ satisfait aux équations

$$(1)\quad \Theta(x_1+2k_1\pi\sqrt{-1}, x_2+2k_2\pi\sqrt{-1}, \ldots)=\Theta(x_1, x_2, \ldots),$$

$$(2)\quad \Theta(x_1+2\varpi_1, x_2+2\varpi_2, \ldots)=e^{-[\Sigma\nu_i x_i+\varpi]},$$

où

$$\varpi=\sum a_{ij}\nu_i\nu_j,\qquad 2\varpi_i=\frac{\partial\varpi}{\partial\nu_i},$$

et où k_i et ν_i sont des entiers quelconques. En vertu de (1),

Θ admet les périodes simultanées

$$\begin{array}{ccccc} 2\pi\sqrt{-1}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, \\ 0, & 2\pi\sqrt{-1}, & 0, & \ldots, & 0, \\ \ldots, & \ldots\ldots\ldots, & ., & \ldots, & \ldots, \\ 0, & 0, & 0, & , & 2\pi\sqrt{-1}; \end{array}$$

et α_i, β_i, γ_i, δ_i désignant des constantes, il en sera de même de la fonction

$$\frac{\Theta(x_1+\alpha_1, x_2+\alpha_2, \ldots)\Theta(x_1+\gamma_1, x_2+\gamma_2, \ldots)}{\Theta(x_1+\beta_1, x_2+\beta_2, \ldots)\Theta(x_1+\delta_1, x_2+\delta_2, \ldots)}.$$

Si entre les constantes α, β, γ, δ, on établit les relations

$$\alpha_i - \beta_i + \gamma_i - \delta_i = 0,$$

la formule (2) montre que cette fonction admettra encore le système de périodes simultanées

$$\begin{array}{cccc} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}. \end{array}$$

Ceci montre qu'il existe des fonctions de n variables avec $2n$ périodes simultanées et sans points essentiels dans le *prismatoïde* des périodes, en appelant ainsi la surface limitée dans l'hyperespace par des plans séparés entre eux par un intervalle égal à une période, surface analogue au périmètre du parallélogramme des périodes dans le cas où il n'y a qu'une variable. Nous voilà conduits à étudier les propriétés de ces fonctions qui sont une généralisation toute naturelle des fonctions doublement périodiques.

THÉORÈME. — *Si l'on considère un système de fonctions périodiques de n variables sans points essentiels, et possédant toutes le même prismatoïde de périodes, f_1, f_2, ..., f_n, les équations simultanées*

$$f_1 = s_1, \quad f_2 = s_2, \quad \ldots, \quad f_n = s_n$$

ont toujours le même nombre de solutions dans le prismatoïde des périodes, quelles que soient les constantes désignées par $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

Considérons, en effet, les fonctions $f_1 - s_1, f_2 - s_2, \ldots, f_n - s_n$ et appliquons le théorème de M. Kronecker (T. III, p. 190) à la recherche des solutions de

$$f_1 - s_1 = 0, \quad f_2 - s_2 = 0, \quad \ldots$$

contenues dans l'espace compris entre la surface du prismatoïde des périodes et les surfaces limitant l'espace dans lequel l'une des fonctions f au moins est infinie; le nombre des solutions est donné par une intégrale de la forme

$$\int \frac{dV}{N},$$

dans laquelle N est une puissance de la somme des carrés des modules de $f_1 - s_1$, $f_2 - s_2$, ... et dans laquelle dV ne contient pas $s_1, s_2, \ldots$. Cette intégrale doit être prise le long des surfaces considérées. Elle est égale à un nombre entier; elle est d'ailleurs continue par rapport à $s_1, s_2, \ldots$. Sa valeur est donc indépendante de $s_1, s_2, \ldots$, ce qui démontre notre théorème.

XXXVI. — Théorèmes de M. Weierstrass.

Théorème I. — *Soient* $u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}$, $n+1$ *fonctions de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sans points essentiels à distance finie et possédant les* $2n$ *mêmes systèmes de périodes simultanées; elles sont liées entre elles par une relation algébrique.*

En effet, si l'on donne à $u_1, u_2, \ldots$ des valeurs déterminées, il en résultera un certain nombre k fixe de valeurs correspondantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et, par suite, k valeurs de u_{n+1}; les fonctions symétriques rationnelles de ces k valeurs n'auront pas de points essentiels en $u_1, u_2, \ldots, u_n$

et, par suite, seront rationnelles en $u_1, u_2, \ldots, u_n$; il en résulte que u_{n+1} est racine d'une équation de degré k dont les coefficients sont rationnels en $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Considérons deux fonctions U et V, telles que u_{n+1}; U et V sont racines de deux équations de degrés k à coefficients rationnels en $u_1, u_2, \ldots, u_n$; quand on se donne $u_1, u_2, \ldots, u_n$, il en résulte k systèmes de valeurs des x; à chacun de ces systèmes correspond une valeur de U et l'on peut choisir de telle sorte qu'il lui corresponde une valeur de V, de sorte que, quand $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et U sont donnés, V est déterminé; V est donc rationnellement exprimable au moyen de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et U.

Théorème II. — *Soient f et* F *deux fonctions ayant* $2n$ *systèmes de périodes communes et sans points essentiels à distance finie,* F *pourra s'exprimer rationnellement au moyen de* f, $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Car f et ses dérivées ont les mêmes systèmes de périodes que F.

Corollaire. — $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ étant une fonction ayant $2n$ périodes simultanées et pas de points essentiels à distance finie, il est clair que $f(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots)$ s'exprimera alors rationnellement au moyen de

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

et de leurs dérivées

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial y_n}.$$

XXXVII. — Théorème de MM. Picard et Poincaré.

Le théorème que nous allons démontrer a été énoncé autrefois par Riemann, qui l'a communiqué sans démonstration à M. Hermite : il était naturel de le soupçonner, mais sa

démonstration était assez difficile; elle a seulement été donnée dans ces derniers temps par MM. Picard et Poincaré (*Comptes rendus* pour 1884).

Il est facile de voir qu'une fonction de n variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$, bien déterminée et sans points essentiels, ne peut avoir plus de $2n$ systèmes de périodes simultanées; la démonstration de ce fait est facile à établir à l'aide des théorèmes énoncés (p. 217 et suiv.).

Mais les périodes d'une fonction qui a $2n$ systèmes de périodes simultanées ne sont pas arbitraires, et le théorème de MM. Picard et Poincaré met en évidence la manière dont ces périodes dépendent les unes des autres.

Soient

$$(1)\quad \left\{\begin{matrix} \omega_{11}, & \omega_{12}, & \ldots, & \omega_{1n}, & \ldots, & \omega_{1,2n}, \\ \omega_{21}, & \omega_{22}, & \ldots, & \omega_{2n}, & \ldots, & \omega_{2,2n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots; \\ \omega_{n1}, & \omega_{n2}, & \ldots, & \omega_{nn}, & \ldots, & \omega_{n,2n} \end{matrix}\right.$$

un système de n périodes de la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *si la substitution linéaire*

$$(2)\quad \left\{\begin{matrix} x_1 = \omega_{11}X_1 + \omega_{12}X_2 + \ldots + \omega_{1n}X_n, \\ x_2 = \omega_{21}X_1 + \omega_{22}X_2 + \ldots + \omega_{2n}X_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \omega_{n1}X_1 + \omega_{n2}X_2 + \ldots + \omega_{nn}X_n, \end{matrix}\right.$$

transforme $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *en* $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, *la fonction* $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *aura pour périodes*

$$(1^{bis})\quad \left\{\begin{matrix} 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0; & \varpi_{11}, & \varpi_{12}, & \ldots, & \varpi_{1n}; \\ 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0; & \varpi_{21}, & \varpi_{22}, & \ldots, & \varpi_{2n}; \\ ., & ., & ., & \ldots, & .; & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots; \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1; & \varpi_{n1}, & \varpi_{n2}, & \ldots, & \varpi_{nn}, \end{matrix}\right.$$

les quantités ϖ_{ij} *satisfaisant à la condition*

$$\varpi_{ij} = \varpi_{ji}.$$

Exprimons en effet rationnellement la fonction f au moyen

de $n+1$ fonctions aux périodes (1), à savoir

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad u_{n+1}.$$

On sait qu'on peut l'exprimer rationnellement au moyen de ces fonctions, si elles sont convenablement choisies, et que l'on peut supposer u_{n+1} fonction algébrique de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ (p. 436). Des relations

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots + \frac{\partial u_i}{\partial x_n}\, dx_n,$$

on tire d'autres relations de la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} dx_1 = P_{11}\, du_1 + P_{12}\, du_2 + \ldots + P_{1n}\, du_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dx_n = P_{n1}\, du_1 + P_{n2}\, du_2 + \ldots + P_{nn}\, du_n; \end{cases}$$

et, comme les dérivées $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ peuvent s'exprimer rationnellement au moyen de $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$, les coefficients P_{ij} seront aussi des fonctions rationnelles de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et de la seule irrationnelle u_{n+1}, fonction algébrique de $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Faisons alors

$$u_1 = \varphi_1(t), \qquad u_2 = \varphi_2(t), \qquad \ldots, \qquad u_n = \varphi_n(t),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ désignant des fonctions rationnelles de t. En vertu des équations (3), les x seront des intégrales abéliennes de première espèce dans lesquelles la fonction algébrique u_{n+1} sera définie par l'équation

$$\theta(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, u_{n+1}) = 0,$$

$\theta(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = 0$ désignant la relation qui lie entre eux les u; et cette équation sera irréductible si les φ sont quelconques; de plus, nos intégrales abéliennes seront linéairement indépendantes. Les périodes de ces intégrales sont de la forme

$$\begin{gathered} m_1\omega_{11} + m_2\omega_{12} + \ldots + m_{2n}\omega_{1,2n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_1\omega_{n1} + m_2\omega_{n2} + \ldots + m_{2n}\omega_{n,2n}, \end{gathered}$$

et il existe entre ces périodes des relations de la forme

$$\sum c_{ij}\omega_{\alpha i}\omega_{\beta j}=0, \qquad c_{ii}=0, \qquad c_{ij}=c_{ji}.$$

On a vu qu'en effectuant sur les intégrales abéliennes une substitution linéaire on obtenait des périodes normales, c'est-à-dire telles que (1 *bis*), ou du moins telles que (1 *bis*) multipliées par $2\pi\sqrt{-1}$, ce qui revient au même pour l'objet que nous avons en vue. Ainsi se trouve établi le théorème de MM. Poincaré et Picard.

Corollaire. — De là résulte un théorème important : c'est que

Toute fonction de n variables sans points essentiels, possédant 2n systèmes de périodes, peut s'exprimer rationnellement au moyen des fonctions Θ.

En effet, on peut l'exprimer rationnellement au moyen de fonctions ayant un système de périodes normales, fonctions qui s'expriment rationnellement au moyen des fonctions Θ.

XXXVIII. — Théorème de M. Poincaré.

Proposons-nous de trouver le nombre des solutions communes aux équations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l}\Theta(x_1-c_{11},\ x_2-c_{12},\ \ldots,\ x_p-c_{1p})=0,\\ \Theta(x_1-c_{21},\ x_2-c_{22},\ \ldots,\ x_p-c_{2p})=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \Theta(x_1-c_{p1},\ x_2-c_{p2},\ \ldots,\ x_p-c_{pp})=0,\end{array}\right.$$

contenues dans un prismatoïde des périodes, formules où

$$\Theta(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p)=\sum e^{\Sigma n_i x_i+\Sigma\alpha_{ij}n_i n_j}.$$

A cet effet, appliquons le théorème de M. Kronecker (t. III, p. 190) au système (1) pour un prismatoïde de périodes, et observons que, l'intégrale de M. Kronecker étant fonction con-

tinue des paramètres qu'elle renferme, tant que les fonctions Θ ne s'annulent pas toutes à la fois sur la surface du prismatoïde des périodes, et, même dans cette hypothèse, si une solution sortait du prismatoïde des périodes, en vertu de la périodicité, il en rentrerait une autre. Cette intégrale conserve donc la même valeur entière; nous en profiterons pour faire varier les coefficients a_{ij} et ramener la fonction Θ à la forme

$$\Theta = \sum e^{\Sigma n_i x_i - \Sigma \alpha_i n_i^2}$$

ou

$$\Theta = \prod \left(\sum e^{n_i x_i - \alpha_i^2 n_i^2} \right).$$

La fonction Θ est alors un produit de fonctions Θ à une seule variable; mais, dans un parallélogramme des périodes, la fonction elliptique Θ n'a qu'un zéro : le nombre des solutions communes aux équations (1) sera donc $1.2.3\ldots p$ dans le cas particulier que nous examinerons et, par suite, $1.2.3\ldots p$ dans le cas général.

Ce théorème a été démontré par M. Poincaré dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* pour 1883.

Corollaire. — Il résulte de là qu'un système de p fonctions de p variables possédant $2p$ systèmes de périodes communes reprend au moins $(2p)!$ fois le même système de valeurs simultanées dans un prismatoïde des périodes.

NOTE.

NOTE SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES.

Le Calcul différentiel et intégral étant pour nous, surtout, l'analyse des fonctions continues, nous avons écarté systématiquement l'étude des fonctions discontinues; nous avons cependant fait observer (t. III, p. 17) qu'une fonction pouvait avoir une intégrale sans être continue; nous allons faire connaître ici la condition nécessaire et suffisante d'après Riemann pour qu'une fonction admette une intégrale.

Une fonction qui ne croît pas au delà de toute limite dans un certain intervalle et qui dans le même intervalle ne décroît pas non plus au delà de toute limite a nécessairement dans cet intervalle ce que nous pouvons appeler un maximum absolu et un minimum absolu, c'est-à-dire qu'il doit exister une quantité M qu'elle ne peut dépasser, mais dont elle peut différer d'aussi peu que l'on veut. Noûs avons vu que ce maximum M était effectivement atteint quand la fonction était continue (Note au Tome I); de même il existe une quantité m au-dessous de laquelle la fonction ne peut pas descendre, mais dont elle peut approcher autant que l'on veut, et qu'elle atteint effectivement si elle est continue.

Quand une fonction dans un intervalle (a, b) ne pourra ni croître, ni décroître au delà de toute limite, nous dirons qu'elle est *limitée* dans cet intervalle. Nous appellerons *oscillation* d'une fonction limitée dans un intervalle (a, b) la différence entre son maximum et son minimum absolu dans cet intervalle.

Théorème de Riemann.

Pour qu'une fonction $f(x)$ limitée tant inférieurement que supérieurement dans un intervalle (a, b) puisse être intégrée entre les limites a et $b > a$, il faut et il suffit que : l'intervalle (a, b) ayant été partagé en d'autres infiniment petits et infiniment nombreux (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, b), la somme s de ces intervalles, dans lesquels l'oscillation est supérieure à une quantité finie fixe ε, puisse être prise moindre que toute quantité donnée.

En effet, supposons $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b$ et

$$x_1 - a = \delta_1, \qquad x_2 - x_1 = \delta_2, \qquad x_3 - x_2 = \delta_3, \qquad \ldots;$$

soient M_k le maximum absolu de $f(x)$ dans l'intervalle (x_{k-1}, x_k), m_k son minimum absolu et $D_k = M_k - m_k$ l'oscillation.

1° Je dis que la somme $\sum_{k=1}^{k=n} M_k \delta_k$ a une limite quand on fait croître n indéfiniment : en effet, en appelant μ la plus grande des quantités M_k, on a

$$\sum M_k \delta_k < \mu \sum \delta_k \quad \text{ou} \quad < \mu(b-a).$$

Si alors, pour calculer la limite de $\sum M_k \delta_k$, on subdivise les intervalles (a, x_1), (x_1, x_2), ..., la somme $\sum M_k \delta_k$ se trouvera remplacée par une autre qui ne pourra pas être moindre que la précédente, mais qui sera toujours inférieure à $\mu(b-a)$; si donc on fait croître le nombre des intervalles par subdivisions successives $\sum M_k \delta_k$ ira en croissant sans dépasser $\mu(b-a)$: il aura donc une limite L. Maintenant je dis que, de quelque manière que croisse le nombre n, $\sum M_k \delta_k$ aura la même limite L. En effet, soit (a, y_1), (y_1, y_2), ...,

(y_{p-1}, b) un mode de subdivision (A) formé de tous les points de division communs à deux modes

$$\text{(B)} \qquad (a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b),$$

$$\text{(C)} \qquad (a, z_1), (z_1, z_2), \ldots, (z_{q-1}, b),$$

en sorte qu'un y soit égal à un x ou à un z. Soient s_A, s_B, s_C les sommes $\sum M_k\delta_k$ relatives à ces trois modes de subdivision; $s_A - s_C$ peut être pris moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$, $s_B - s_C$ également; donc $s_A - s_B$ peut être pris moindre que ε; donc $\sum M_k\delta_k$ a une limite unique et bien déterminée.

2° La somme $\sum_{k=1}^{k=n} m_k\delta_k$ a une limite bien déterminée.

3° Il en résulte que $\sum (M_k - m_k)\delta_k$ ou $\sum D_k\delta_k$ a une limite bien déterminée et, si cette limite est nulle, la quantité

$$\sum \delta_k f(x_k + \theta_k\delta_k),$$

θ_k étant compris entre 0 et 1, aura la même limite que $\sum M_k\delta_k$, ou que $\sum m_k\delta_k$ aura une limite bien déterminée; or cette dernière somme est la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$: ainsi cette intégrale existera si $\lim \sum D_k\delta_k = 0$. Telle est la véritable condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale existe, et si f est continue, D_k étant aussi petit que l'on veut, $\sum D_k\delta_k$ est moindre que $\varepsilon(b-a)$, ε étant aussi petit que l'on veut; par suite, $\lim \sum D_k\delta_k$ est nul et l'intégrale existe comme on l'a vu au tome III.

Pour que $\sum D_k\delta_k$ ait pour limite zéro, il suffit que la somme s des intervalles dans lesquels $D_k > \varepsilon$ tende vers zéro;

en effet, la somme des intervalles dans lesquels $D_k < \varepsilon$ est $b - a - s$, et l'on a évidemment

$$\sum D_k \delta_k < \varepsilon(b - a - s) + s\Theta,$$

Θ désignant la plus grande valeur de D_k. Or $\varepsilon(b - a - s)$ pouvant être pris aussi petit que l'on veut, il suffit que s ait pour limite o, puisque Θ est fini, pour que l'intégrale existe.

C. Q. F. D.

N. B. — Ces considérations permettent de donner plus de généralité que nous ne l'avons fait à la théorie des séries trigonométriques; mais les développements qui en résulteraient appartiennent, il me semble, à une branche de l'Analyse qui ne fait que de naître et qui ne nous sera d'aucune utilité dans la suite de cet Ouvrage.

FIN DU TOME QUATRIÈME.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME IV.

*CHAPITRE I.

Théorie des fonctions synectiques de plusieurs variables.

CHAPITRE II.

Théorie des fonctions algébriques.

*CHAPITRE III.

Sur la transformation des figures planes.

*CHAPITRE IV.

Applications géométriques des doctrines exposées au Chapitre précédent.

CHAPITRE V.

Des transcendantes engendrées par l'intégration indéfinie.

CHAPITRE VI.

Théorie des intégrales elliptiques.

CHAPITRE VII.

Théorie des fonctions elliptiques.

CHAPITRE VIII.

Théorie générale des fonctions doublement périodiques et des fonctions auxiliaires

*CHAPITRE IX.

Fonctions modulaires.

*CHAPITRE X.

Applications géométriques de la théorie des fonctions elliptiques.

*CHAPITRE XI.

Étude des fonctions abéliennes.

NOTES.

FIN DE LA TABLE DU TOME QUATRIÈME.

ERRATA.

Tome III (*suite*).

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
250	3	$\frac{\alpha^{2m+1}+\alpha^{2m+1}}{\alpha^{2m+1}-1}$	$\frac{\alpha^{(2m+1)(2n+1)}-\alpha^{2m+1}}{\alpha^{2(2m+1}-1}$
334	3	$\frac{f(z)\,dz}{z}$	$\frac{f(z)\,dz}{z-a}$
337	12, 14 et 15	$f(\mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}})$	$f(\mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}}+x)$

Tome IV.

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
42	9	p	k
42	13	supprimez les mots *somme qui est un nombre entier.*	
129	6	$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu}$	$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu+1}$
129	17	$(2\pi)^{\nu}$	$(2\pi)^{\nu+1}$
139	9 en remontant	$+\frac{X_1^2}{4X_0}$	$-\frac{X_1^2}{4X_0}$
161	2 en remontant	Lauden	Landen
175	3 en remontant	$\frac{\mathrm{A}b'}{mna}$	$\mathrm{A}b'mna$
181	3	$\sin\theta$	$\sin^2\theta$
184	2, sous le 1er radical	$m_1 \ldots n_1$	$m_1^2 \ldots n_1^2$
194	5 en rem., sous le 1er rad.	$\mathrm{sn}(k' \ldots$	$\mathrm{sn}^2(k' \ldots$
211	3, au numéro	$+4k^4s^2s'^2$	$+4k^4s^4s'^4$
212	5	$\frac{d\varphi}{d\psi}$	$\frac{d\psi}{d\varphi}$
213	11 en remontant	en φ_1, en φ_2	en φ_2, en φ_1
230	5, au dénominateur	$f(z+\omega)$	$f(z+\omega)-a$
389	5 en remontant	$(a''\xi+b''\eta+c''\zeta)$	$(a''\xi+b''\eta+c''\zeta)^2$
397	dernière ligne	ϖ	ϖ_2
400	10 et 11	$m-1$	$m-2$
417	2	x_j	x_i
418	5	ξ_j	ξ_i
430	dernière ligne	x'_2	y'_1

13380 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.



